Feuille 5
Nombres réels

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$
2. En déduire que
$$A = \left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}$$
Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 2.

Pour chacun des exercices suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, si oui, les déterminer.
$$A = \left\{\frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}; \qquad B = \left\{\frac{1}{1 - 2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$C = \left\{\frac{x^3}{|x^3 - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[\right\}; \qquad D = \left\{\frac{x^n}{|x^n - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 3.

Soit
$$X = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}; p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$$
1. Montrer que X est majoré et minoré.
2. En déduire que X possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Exercice 4.

Soit
$$X = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. Montrer que X admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exercice 5.

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{y = -x; x \in A\}$
1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.
2. En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que
$$\inf(B) = -\sup(A)$$

Exercice 6.

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\}$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}, x^3 \leq 1\}$$
$$A_3 = \left\{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1\right\}$$
$$A_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1\right\}$$
$$A_5 = \left\{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{1}{x^2-1} < 1\right\}$$

Exercice 7.

Montrer que le nombre réel

$$\gamma = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$

Est un entier naturel que l'on déterminera.

Indication : on pourra monter que γ est solution d'une équation du troisième degré à coefficients entiers.

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$
2. En déduire la partie entière du nombre réel

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$