Feuille 6
Fractions rationnelles

Exercice 1.

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}\ ;\ \frac{X}{(X+1)(X-2)}\ ;\ \frac{2X}{X^2+X+1}\ ;$$
$$\frac{X^2}{1+X^2};\ \frac{X}{X^2-3X+2};\ \frac{X^4}{X^2-3X+2}$$

Les décomposer.

Correction exercice 1.

1. Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division euclidienne. Il existe a et b réels tels que :

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-2}$$

On multiplie par $X+1$, puis $X=-1$

$$a=\left[\frac{1}{X-2}\right]_{X=-1}=-\frac{1}{3}$$

On multiplie par $X-2$, puis $X=2$

$$b=\left[\frac{1}{X+1}\right]_{X=2}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}=\frac{-1/3}{X+1}+\frac{1/3}{X-2}$$

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division euclidienne. Il existe a et b réels tels que :

$$\frac{X}{(X+1)(X-2)}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-2}$$

On multiplie par $X+1$, puis $X=-1$

$$a=\left[\frac{X}{X-2}\right]_{X=-1}=\frac{1}{3}$$

On multiplie par $X-2$, puis $X=2$

$$b=\left[\frac{X}{X+1}\right]_{X=2}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}=\frac{1/3}{X+1}+\frac{2/3}{X-2}$$

X^2+X+1 n'a pas de racines réelles

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division euclidienne. Il existe a et b réels tels que

$$\frac{2X}{X^2+X+1}=\frac{aX+b}{X^2+X+1}$$

Donc $a=2$ et $b=0$

On aurait mieux fait de remarquer qu'il s'agissait d'un élément simple.
Le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, il faut faire une division euclidienne. Ici la division est particulièrement simple, elle donne

$$X^2 = 1 \times (X^2 + 1) - 1$$

$$\frac{X^2}{1+X^2} = \frac{1 \times (X^2+1) - 1}{1+X^2} = \frac{1 \times (X^2+1)}{1+X^2} - \frac{1}{1+X^2} = 1 - \frac{1}{X^2+1}$$

$X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle donc $\frac{1}{X^2+1}$ est un élément simple, la décomposition en éléments simple est achevée

$$\frac{X^2}{1+X^2} = 1 - \frac{1}{X^2+1}$$

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division euclidienne et constate facilement que les racines de $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2 par conséquent $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Il existe a et b réels tels que

$$\frac{X}{X^2-3X+2} = \frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

On multiplie par $X - 1$, puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{X}{X-2}\right]_{X=1} = -1$$

On multiplie par $X - 2$, puis $X = 2$

$$b = \left[\frac{X}{X-1}\right]_{X=2} = 2$$

$$\frac{X}{X^2-3X+2} = \frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{2}{X-2}$$

Le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, il faut faire une division euclidienne

$$\begin{array}{l|l}
X^4 & X^2-3X+2 \\ \cline{2-2}
X^4-3X^3+2X^2 & X^2 \overset{+}{-} 3X \cancel{-11} +7 \\ \hline
\quad 3X^3-2X^2 & \\
\quad 3X^3 \overset{-}{\cancel{+}} 9X^2 + 6X & \\ \hline
\quad\quad \cancel{-11}X^2 \cancel{+} \cancel{6X} & \\
\quad\quad 7X^2 - 6X & \\
\quad\quad \cancel{-11X^2+33X-22} & \\
\quad\quad 7X^2-21X+14 & \\ \hline
\quad 15X-14 \quad \cancel{-27X+22} &
\end{array}$$

Donc $X^4 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 - 3X - 11) - 27X + 22$

$$\frac{X^4}{X^2-3X+2} = \frac{(X^2-3X+2)(X^2-3X-11) - 27X + 22}{X^2-3X+2}$$

$$= \frac{(X^2-3X+2)(X^2-3X-11)}{X^2-3X+2} + \frac{-27X+22}{X^2-3X+2} = X^2 - 3X - 11 + \frac{-27X+22}{X^2-3X+2}$$

Il reste à décomposer $\frac{-27X+22}{X^2-3X+2} = \frac{-27X+22}{(X-1)(X-2)}$ en éléments simples.
Il existe a et b réels tels que

$$\frac{-27X+22}{X^2-3X+2} = \frac{-27X+22}{(X-1)(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

On multiplie par $X - 1$, puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{-27X+22}{X-2}\right]_{X=1} = 5$$

On multiplie par $X - 2$, puis $X = 2$

$$b = \left[\frac{-27X+22}{X-1}\right]_{X=2} = -32$$

$$\frac{-27X+22}{X^2-3X+2} = \frac{-27X+22}{(X+1)(X-2)} = \frac{5}{X-1} + \frac{-32}{X-2}$$

Et enfin

$$\frac{X^4}{X^2-3X+2} = X^2-3X-11+\frac{5}{X-1}+\frac{-32}{X-2}$$

Exercice 2.

Décomposer la fractionnelle suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F(X) = \frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$$

Correction exercice 2.

Pas de division euclidienne. Et X^2+1 n'a pas de racine réelle. Il existe a, b, c et d quatre réels tels que :

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

On multiplie par X^2+1, puis $X = i$

$$ci + d = \left[\frac{X-1}{X^2}\right]_{X=i} = \frac{i-1}{-1} = 1-i$$

Donc $c = -1$ et $d = 1$

On multiplie par X^2, puis $X = 0$

$$b = \left[\frac{X-1}{X^2+1}\right]_{X=0} = -1$$

On multiplie par X, puis $X \to +\infty$

$$0 = a + c$$

Donc $a = -c = 1$, finalement

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{-X+1}{X^2+1}$$

Exercice 3.

Décomposer la fractionnelle suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F(X) = \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$$

Correction exercice 3.

Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser X^4-X+2 par $(X-1)(X^2-1) = X^3-X^2-X+1$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & & & -X & +2 & X^3-X^2-X+1 \\
\cline{6-6}
X^4 & -X^3 & -X^2 & +X & & X+1 \\
\cline{1-5}
 & X^3 & +X^2 & -2X & +2 & \\
 & X^3 & -X^2 & -X & +1 & \\
\cline{1-5}
 & & 2X^2 & -X & +1 &
\end{array}$$

$$F(X) = \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)} = X+1+\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}$$

On pose $G(X) = \frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}$, il existe 4 réels, a, b, c et d tels que :

On fera attention au fait que la bonne factorisation de $(X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$

$$G(X)=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2(X+1)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}$$

On multiplie par $(X-1)^2$ puis $X=1$

$$a=\left[\frac{2X^2-X+1}{X+1}\right]_{X=1}=\frac{2}{2}=1$$

On multiplie par $X+1$ puis $X=-1$

$$c=\left[\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2}\right]_{X=-1}=\frac{4}{4}=1$$

On multiplie par X puis X tend vers l'infini.

$2=b+c$ donc $b=1$.

Donc

$$F(X)=X+1+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}$$

Exercice 4.

Soit

$$F(X)=\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$$

Décomposer $F'X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, dans $\mathbb{C}(X)$.

Correction exercice 4.

Dans $\mathbb{R}(X)$

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{aX+b}{X^2+X+1}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{(X-1)^2}\quad (*)$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$d=\left[\frac{3}{X^2+X+1}\right]_{X=1}=1$$

Première méthode

On multiplie par X^2+X+1, puis $X=j$

$$aj+b=\left[\frac{3}{(X-1)^2}\right]_{X=j}=\frac{3}{(j-1)^2}=\frac{3}{j^2-2j+1}=\frac{3}{-3j}=-\frac{1}{j}=-j^2=1+j$$

Donc $b=1$ et $a=1$

On prend $X=0$ dans $(*)$

$$3=b-c+d\Rightarrow c=-3+b+d=-3+1+1=-1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Deuxième méthode

$X=0$ dans $(*)$

$$3=b-c+d\Leftrightarrow b-c=3-d=2\Leftrightarrow b=2+c$$

On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$0=a+c\Leftrightarrow a=-c$$

$X=-1$ dans $(*)$

$$\frac{3}{4}=-a+b-\frac{c}{2}+\frac{d}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}=c+(2+c)-\frac{c}{2}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-2=\frac{3}{2}c\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}c\Leftrightarrow c=-1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$, il suffit de décomposer $\frac{X+1}{X^2+X+1}$, comme

$X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$ avec $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Il existe $A\in\mathbb{C}$ tel que

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{X+1}{(X-j)(X-j^2)}=\frac{A}{X-j}+\frac{\overline{A}}{X-j^2}$$

On multiplie par $X-j$, puis $X=j$

$$A=\left[\frac{X+1}{X-j^2}\right]_{X=j}=\frac{j+1}{j-j^2}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j}+\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}$$

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j}+\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Dans $\mathbb{C}(X)$

On reprend le premier exercice

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

$-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$ est déjà décomposé, il reste à décomposer $\frac{X+1}{X^2+X+1}$

Les racines complexes de $X^2+X+1=0$ sont $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2=\overline{j}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$, « normal », c'est son conjugué.

Donc $X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$, alors il existe $a\in\mathbb{C}$ tel que

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{X+1}{(X-j)(X-j^2)}=\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}$$

On multiplie par $X-j$, puis $X=j$

$$a=\left[\frac{X+1}{X-j^2}\right]_{X=j}=\frac{j+1}{j-j^2}$$

Soit on remplace j et j^2 par respectivement $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit on connait « les résultats sur $1, j\ \ j^2$. Ce que nous allons faire.

$$a=\frac{j+1}{j-j^2}=\frac{-j^2}{j(1-j)}=-\frac{j}{1-j}=-\frac{j(1-j^2)}{(1-j)(1-j^2)}=\frac{j-j^2}{1-(j+j^2)+j^3}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-(-1)+1}$$
$$=\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{\frac{i\sqrt{3}}{3}}{X-j}+\frac{-\frac{i\sqrt{3}}{3}}{X-j^2}$$

Alors dans $\mathbb{C}(X)$

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{\frac{i\sqrt{3}}{3}}{X-j}+\frac{-\frac{i\sqrt{3}}{3}}{X-j^2}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Exercice 5.

Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes :

a. $\frac{X}{X^2-1}$

b. $\frac{X+1}{X^2+1}$

c. $\frac{X^2}{X^3-1}$

Correction exercice 5.

a. Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division euclidienne. Il existe a et b réels tels que :

$$\frac{X}{X^2-1}=\frac{X}{(X-1)(X+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}$$

On peut multiplier par $X-1$, puis $X=1$ et multiplier par $X+1$, puis $X=-1$. On va faire autrement

$$\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}=\frac{a(X+1)+b(X-1)}{(X-1)(X+1)}=\frac{(a+b)X+a-b}{X^2-1}$$

Par conséquent

$$\frac{X}{X^2-1}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}\Leftrightarrow\frac{X}{X^2-1}=\frac{(a+b)X+a-b}{X^2-1}\Leftrightarrow X=(a+b)X+a-b\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\a-b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\frac{X}{X^2-1}=\frac{1/2}{X-1}-\frac{1/2}{X+1}$$

Cette méthode ne fonctionne « raisonnablement » que s'il n'y a que deux (voire trois) coefficients à trouver.

b.

$$\frac{X+1}{X^2+1}$$

Est de la forme

$$\frac{aX+b}{X^2+1}$$

Où X^2+1 est un polynôme sans racine réelle, il s'agit donc un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$.

c. Le degré du numérateur est strictement inférieur dénominateur, pas de division euclidienne à faire,
Et comme $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ soit par division euclidienne de X^3-1 par $X-1$, soit par la formule a^n-b^n avec $a=X, b=1$ et $n=3$, pas de division du numérateur par le dénominateur vu les degré 2 « en haut » et 3 « en bas ». Il existe a, b et c tels que :

$$\frac{X^2}{X^3-1}=\frac{X^2}{(X-1)(X^2+X+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

On multiplie par $X-1$, puis $X=1$

$$a=\left[\frac{X^2}{X^2+X+1}\right]_{X=1}=\frac{1}{3}$$

On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$X\frac{X^2}{(X-1)(X^2+X+1)}=X\frac{a}{X-1}+X\frac{bX+c}{X^2+X+1}\Leftrightarrow\frac{X^3}{X^3-1}=\frac{aX}{X-1}+\frac{bX^2+cX}{X^2+X+1}$$

Il s'agit de limite de quotient de polynômes donc la limite des termes de plus haut degré « l'emporte »
Alors

$$1=a+b$$

Ensuite on fait $X=0$ dans $\frac{X^2}{(X-1)(X^2+X+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+X+1}$, cela donne

$$0=-a+c$$

En résumant ces trois actions on a

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ a+b=1 \\ -a+c=0 \end{cases} \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{2}{3} \\ c=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement

$$\frac{X^2}{X^3-1}=\frac{\frac{1}{3}}{X-1}+\frac{\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}}{X^2+X+1}$$

On pose

$$G(X)=\frac{\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}}{X^2+X+1}$$

Il existe $a\in\mathbb{C}$ tel que

$$G(X)=\frac{\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}}{X^2+X+1}=\frac{\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}}{(X-j)(X-j^2)}=\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}$$

On multiplie par $X-j$, puis $X=j$

$$a=\left[\frac{\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}}{X-j^2}\right]_{X=j}=\frac{1}{3}\times\frac{2j+1}{j-j^2}=\frac{1}{3}\times\frac{(2j+1)(j^2-j)}{(j-j^2)(j^2-j)}=\frac{1}{3}\times\frac{2j^3-2j^2+j^2-j}{j^3-j^2-j^4+j^3}=\frac{1}{3}\times\frac{2-j^2-j}{1-j^2-j+1}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2+1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

Par conséquent

$$G(X)=\frac{\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}}{X^2+X+1}=\frac{\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}}{(X-j)(X-j^2)}=\frac{1/3}{X-j}+\frac{1/3}{X-j^2}$$

Et

$$\frac{X^2}{X^3-1}=\frac{\frac{1}{3}}{X-1}+\frac{\frac{1}{3}}{X-j}+\frac{\frac{1}{3}}{X-j^2}$$

Exercice 6.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ la fraction suivante :

$$F(X)=\frac{1}{(X^2+1)^2-X^2}$$

Indication : Noter que F est paire, i.e., $F(X)=F(-X)$

Correction exercice 6.

Il n'y a pas de division euclidienne à faire

$$(X^2+1)^2-X^2=(X^2-X+1)(X^2+X+1)$$

Ces deux polynômes n'ont pas de racine réelles, il existe a,b,c et d réels tels que :

$$F(X)=\frac{1}{(X^2-X+1)(X^2+X+1)}=\frac{aX+b}{X^2-X+1}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}\quad(1)$$

$$F(X)=F(-X)\Leftrightarrow\frac{aX+b}{X^2-X+1}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}=\frac{-aX+b}{X^2+X+1}+\frac{-cX+d}{X^2-X+1}$$

D'après l'unicité de la décomposition $a = -c$ et $b = d$
Dans (1), on pose $X = 0$

$$1 = b + d$$

Comme $b = d$ on a $b = d = \frac{1}{2}$
Pour l'instant on a :

$$F(X) = \frac{1}{(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)} = \frac{aX + \frac{1}{2}}{X^2 - X + 1} + \frac{-aX + \frac{1}{2}}{X^2 + X + 1}$$

On pose $X = 1$

$$\frac{1}{3} = a + \frac{1}{2} + \frac{-a + \frac{1}{2}}{3} \Leftrightarrow 2 = 6a + 3 - 2a + 1 \Leftrightarrow -2 = 4a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Donc

$$F(X) = \frac{1}{(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)} = \frac{-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}}{X^2 - X + 1} + \frac{\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}}{X^2 + X + 1}$$

Exercice 7.

Si $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et si $m \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que :
$A = BQ + X^{m+1}R;$ et $\deg(Q) \leq m$

Illustrer avec

1. $A = 1 - X, B = 1 + X^2, m = 4.$
2. $A = 1 + X - X^2 + X^3, B = 1 - X, m = 3.$

Correction exercice 7.

1.

$$\begin{array}{l|l}
1 - X & 1 + X^2 \\ \cline{2-2}
1 \quad + X^2 & 1 - X - X^2 + X^3 + X^4 \\ \hline
\quad -X - X^2 & \\
\quad -X \qquad - X^3 & \\ \hline
\qquad -X^2 + X^3 & \\
\qquad -X^2 \qquad - X^4 & \\ \hline
\qquad\qquad X^3 + X^4 & \\
\qquad\qquad X^3 \qquad + X^5 & \\ \hline
\qquad\qquad\quad X^4 \; - X^5 & \\
\qquad\qquad\quad X^4 \qquad + X^6 & \\ \hline
\qquad\qquad\qquad - X^5 - X^6 &
\end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} 1 - X &= (1 + X^2)(1 - X - X^2 + X^3 + X^4) + (-X^5 - X^6) \\ &= (1 + X^2)(1 - X - X^2 + X^3 + X^4) + X^5(-1 - X) \end{aligned}$$

2.

$A = 1 + X - X^2 + X^3$, $B = 1 - X$, $m = 3$.

$$\begin{array}{l|l}
1 + X - X^2 + X^3 & 1 - X \\ \cline{2-2}
1 - X & 1 + 2X + X^2 + 2X^3 \\ \cline{1-1}
\quad 2X - X^2 + X^3 & \\
\quad 2X - 2X^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad X^2 + X^3 & \\
\qquad X^2 - X^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 2X^3 + X^4 & \\
\qquad\quad 2X^3 - 2X^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 3X^4 &
\end{array}$$

Donc $1 + X - X^2 + X^3 = (1 - X)(1 + 2X + X^2 + 2X^3) + X^3(3X)$

Exercice 8.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)}$$

Correction exercice 8.

Il existe a, b, c et d, réels tels que :

$$\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX + d}{X^2+1}$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X = 1$

$$b = \left[\frac{-X^2 + 2X + 1}{X^2 + 1}\right]_{X=1} = \frac{2}{2} = 1$$

On multiplie par $X^2 + 1$, puis $X = i$

$$ci + d = \left[\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2}\right]_{X=i} = \frac{-i^2 + 2i + 1}{(i-1)^2} = \frac{2 + 2i}{i^2 - 2i + 1} = \frac{2 + 2i}{-2i} = \frac{1+i}{-i} = -1 + i$$

Donc $c = 1$ et $d = -1$

On multiplie par X, puis $X \to +\infty$

$$0 = a + c$$

Donc $a = -1$

$$\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X-1}{X^2+1}$$

Autre méthode

On trouve $b = 1$ et $a + c = 0$ comme ci-dessus.

On prend $X = 0$

$$1 = -a + b + d \Leftrightarrow d = a$$

Puis on prend $X = -1$

$$-\frac{2}{4 \times 2} = -\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{-c + d}{2}$$

On multiplie le tout par 2 et on remplace b par 1

$$-\frac{1}{2} = -a + \frac{1}{2} - c + d \Leftrightarrow -(a + c) + d = -1 \Leftrightarrow d = -1$$

D'où : $a = -1$ et $c = -a = 1$

Finalement

$$F(X)=\frac{-X^2+2X+1}{(X-1)^2(X^2+1)}=\frac{-1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{X-1}{X^2+1}$$

Exercice 9.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{X^4-1}$$

1. Dans $\mathbb{R}(X)$
2. Dans $\mathbb{C}(X)$

Correction exercice 9.

1. Il existe a, b, c et d réels tels que : (pas de soucis de division euclidienne)

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$

On multiplie par $X-1$ puis $X=1$

$$a=\left[\frac{6X^3+3X^2-5}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1}=\frac{6+3-5}{2\times 2}=1$$

On multiplie par $X+1$ puis $X=-1$

$$b=\left[\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1}=\frac{-6+3-5}{-2\times 2}=2$$

On multiplie par X, puis X tend vers l'infini.

$6=a+b+c$, donc $c=6-1-2=3$

$X=0$

$5=-5+b+d$ donc $d=5+1-2=4$

Donc

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}+\frac{3X+4}{X^2+1}$$

2. Il reste à décomposer dans $\mathbb{C}[X]$

$$\frac{3X+4}{X^2+1}=\frac{3X+4}{(X-i)(X+i)}=\frac{a}{X-i}+\frac{\overline{a}}{X+i}$$

On multiplie par $X-i$, puis $X=i$.

$$a=\left[\frac{3X+4}{X+i}\right]_{X=i}=\frac{3i+4}{2i}=\frac{(3i+4)(-i)}{2}=\frac{3}{2}-2i$$

Donc

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}+\frac{\frac{3}{2}-2i}{X-i}+\frac{\frac{3}{2}+2i}{X+i}$$

Exercice 10. (difficile)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction suivante

$$F=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

Correction exercice 10.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division.

La forme de la décomposition est :

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}+\frac{eX+f}{(X^2+X+1)^2}$$

On multiplie par X^2, puis $X=0$.

$$b=\left[\frac{X^4+1}{(X^2+X+1)^2}\right]_{X=0}=1$$

On multiplie par $(X^2+X+1)^2$, puis $X=j$.

$$ej+f=\left[\frac{X^4+1}{X^2}\right]_{X=j}=\frac{j^4+1}{j^2}=\frac{j+1}{j^2}=\frac{-j^2}{j^2}=-1$$

Donc $e=0$ et $f=-1$.

Ensuite ce n'est pas simple, il manque encore 3 coefficients.

On pourrait multiplier par X puis faire tendre X vers l'infini, mais ensuite il faudra prendre deux valeurs et les calculs ne s'annoncent pas simples, alors on va inaugurer une nouvelle technique qui sert dans des cas un peu compliqués.

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{1}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}+\frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

On appelle

$$G(X)=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}$$

C'est une fraction rationnelle, d'après l'unicité de sa décomposition en élément simple, qui est, d'après la ligne ci-dessus, $\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$, on doit pouvoir, en réduisant au même dénominateur, trouver que le dénominateur de $G(X)$ est $X(X^2+X+1)$. On y va.

$$\begin{aligned}G&=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}=\frac{X^4+1-(X^2+X+1)^2+X^2}{X^2(X^2+X+1)^2}\\&=\frac{X^4+X^2+1-(X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X)}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^3-2X^2-2X)}{X^2(X^2+X+1)^2}\\&=\frac{-2}{X(X^2+X+1)}\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{-2}{X(X^2+X+1)}=\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

On multiplie par X, puis $X=0$

$$a=\left[\frac{-2}{X^2+X+1}\right]_{X=0}=-2$$

On multiplie par X^2+X+1, puis $X=j$.

$$cj+d=\left[\frac{-2}{X^2}\right]_{X=j}=\frac{-2}{j^2}=-2j$$

Donc $c=-2$ et $d=0$

Finalement

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{-2}{X}+\frac{1}{X^2}+\frac{-2X}{X^2+X+1}+\frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$$