

Feuille d'exercices 7

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1.

1. Montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

2. Résoudre

$$\arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Correction exercice 1.

1. $1 > \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, comme \arccos est décroissante,

$$\arccos(1) < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ce qui équivaut à

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

2. D'après la première question

$$0 < 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \in [0, \pi]$$

Et bien sûr

$$\arccos(x) \in [0, \pi]$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) &\Leftrightarrow x = \cos\left(2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2 \cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8} - 1 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Montrer que $2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\sin(2t) = \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$$

3. En déduire que

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Correction exercice 2.

1. $0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \arctan(0) < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \arctan(1)$

Car \arctan est strictement croissante, donc

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$$

Ce qui entraîne que $0 < 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{2 \sin(t)}{\cos(t)} \times \cos^2(t) = 2 \sin(t) \cos(t) = \sin(2t)$$

3.

$$\sin\left(2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2 \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1 + \tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{5}$$

Comme $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ et $2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ sont dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

2. Montrer que :

$$0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$

3. Résoudre

$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

On rappelle que $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$

Correction exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} &= \frac{\sin(x)}{\cos(x) \sqrt{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x) \sqrt{\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = \frac{\sin(x) |\cos(x)|}{\cos(x)} \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

Car $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Comme $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on peut appliquer la formule précédente, en particulier $x \neq 0$ donc on peut diviser par $\tan(x)$

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

2.

$$0 < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow 0 = \arctan(0) < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Car \arctan est strictement croissante.

$$0 < \frac{5}{12} < 1 \Rightarrow 0 = \arctan(0) < \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Car \arctan est strictement croissante.

En additionnant ces deux inégalités on trouve que

$$0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$

3.

Comme $\arcsin(x)$ et $\arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$ sont dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \arctan\left(\frac{3}{5}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \Leftrightarrow x = \sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right) \\ &= \sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) \cos\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right) + \cos\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) \sin\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right) \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} \times \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{16+9}{4^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{144+25}{12^2}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{16+9}{4^2}}} \times \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{\frac{144+25}{12^2}}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\frac{13}{12}} + \frac{1}{\frac{5}{4}} \times \frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65} \end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f .
4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$$

Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x = -1$ et $x = 1$?

5. Tracer le graphe de f .

Correction exercice 4.

1. f est définie et continue si et seulement si $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$

Or

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

- 2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = \arcsin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = \arcsin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- 3.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} = \frac{-1}{\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{|x|}} = \frac{-|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} < 0$$

f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

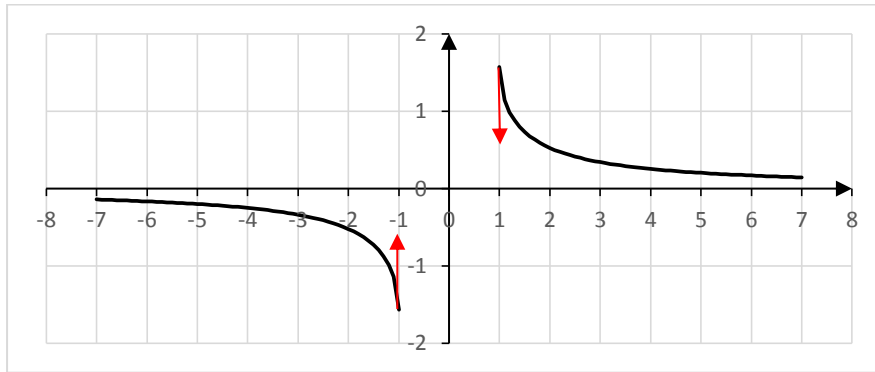
- 4.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = -\infty$$

Le graphe de f admet des demi-tangente verticales en $x = -1$ et en $x = 1$.

5.



Exercice 5.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).
2. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème, sur quel ensemble est-elle dérivable ?
3. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Correction exercice 5.

1. \arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$, $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $] -1,1[$ donc f est définie et continue sur $] -1,1[$.
- 2.

$$f(x) = \arcsin(x) - x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in]-1,1[,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x \left(-\frac{1}{2}\right) (-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

f est dérivable sur $] -1,1[$.

3. $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $] -1,1[$. Comme $f(0) = \arcsin(0) - \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$
Si $x < 0$ alors $f(x) > f(0) = 0$ et si $x > 0$ alors $f(x) < f(0) = 0$.

Exercice 6.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f .

5. Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Correction exercice 6.

1.

$$1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2 = \frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4 - (1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

f est définie et continue sur \mathbb{R} .

2. On pose $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$u'(x) = \frac{(-2x)(1+x^2) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\sqrt{1 - (u(x))^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{2|x|}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{2|x|} = \frac{2x}{|x|(1+x^2)}$$

f est dérivable pour tout $x \neq 0$.

En 0^- , $x < 0$ donc $|x| = -x$ et

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2$$

En 0^+ , $x > 0$ donc $|x| = x$ et

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$$

f n'est pas dérivable en 0.

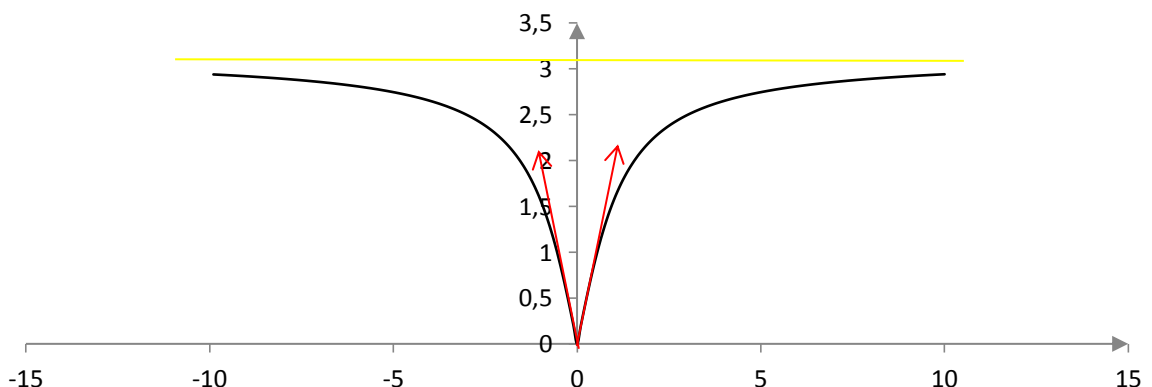
3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$

4.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad -2 \quad \quad 2 \quad +$	
$f(x)$	π	0	π



5. Si $x < 0$

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = -2 \arctan(x) + K_1$$

On prend $x = -1$

$$\arccos(0) = -2 \arctan(-1) + K_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = K_1 \Rightarrow K_1 = 0$$

Et

$$f(x) = -2 \arctan(x)$$

Si $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = 2 \arctan(x) + K_2$$

On prend $x = 1$

$$\arccos(0) = 2 \arctan(1) + K_2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

Et

$$f(x) = 2 \arctan(x)$$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
2. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f .

Correction exercice 7.

1. On pose $X = 1 - 2x^2$

$$1 - X^2 = 1 - (1 - 2x^2)^2 = 1 - (1 - 4x^2 + 4x^4) = 4x^2 - 4x^4 = 4x^2(1 - x^2)$$

f est définie et continue si et seulement si

$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow (1 - 2x^2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 - X^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2(1 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$$

Bref f est définie et continue sur $D_f = [-1, 1]$

2. Si $f(x) = \arccos(u(x))$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$

$$u'(x) = -4x \text{ et } 1 - (u(x))^2 = 1 - X^2 = 4x^2(1 - x^2) \text{ donc}$$

$$f'(x) = -\frac{-4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} = \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

Si $|x|\sqrt{1-x^2} \neq 0$, c'est-à-dire si $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, f est dérivable.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable en ± 1 .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2$$

f n'est pas dérivable en 0.

3. Si $x \in]-1,0[$ alors $|x| = -x$ donc $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} < 0$

Si $x \in]0,1[$ alors $|x| = x$ donc $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} > 0$

$$f(-1) = \arccos(1 - 2(-1)^2) = \arccos(-1) = \pi$$

$$f(1) = \arccos(1 - 2 \times 1^2) = \arccos(-1) = \pi$$

$$f(0) = \arccos(1 - 2 \times 0^2) = \arccos(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en 1 .

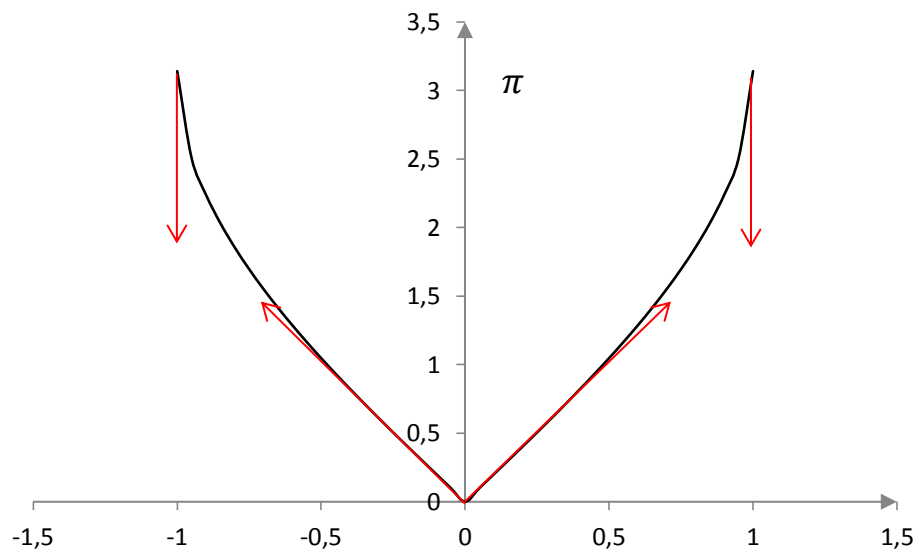
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^- .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^+ .

x	-1	0	1
$f'(x)$	$-\infty$	-2 2	$+\infty$
$f(x)$	π	0	π



4. Sur $] -1,0[$, $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x) = 2 \arccos(x) + K_1$

A priori on ne peut pas prendre la valeur -1 , ni la valeur 0 car cette relation n'est valable que sur $] -1,0[$.

On peut prendre la valeur $x = -\frac{1}{2}$. On peut faire autrement, comme f est continue en 0 (ou en -1), on écrit :

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

Or pour $x > -1$ $f(x) = 2 \arccos(x) + K_1$ donc

$$\begin{aligned} \arccos(1 - 2 \times 1^2) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (2 \arccos(x) + K_1) \Leftrightarrow \arccos(-1) = 2 \arccos(-1) + K_1 \\ &\Leftrightarrow K_1 = -\arccos(-1) = -\pi \end{aligned}$$

La continuité en 0 permet de conclure que :

$$\forall x \in [-1,0], f(x) = 2 \arccos(x) - \pi$$

Remarque : on aurait pu utiliser que $\int -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2 \arcsin(x) + K$ et on trouve alors $K = 0$.

Sur $]0,1[$, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x) = 2 \arcsin(x) + K_2$

Pour changer de méthode, on prend $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + K_2$, donc

$$K_2 = \arccos\left(1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

La continuité de f en 0 et 1 permet d'affirmer que :

$$\forall x \in [0,1], f(x) = 2 \arcsin(x)$$

Exercice 8.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin(1 - 2 \cos^4(x))$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I .
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f . On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ?
Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π .
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer son graphe sur trois périodes

Correction exercice 8.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \cos^4(x) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2 \cos^4(x) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2 \cos^4(x) \leq 1$$

Donc f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions définies et continues sur \mathbb{R} .

- 2.

$$f(x) = \arcsin(1 - 2 \cos^4(x + 2\pi)) = \arcsin(1 - 2 \cos^4(x)) = f(x)$$

Donc f est 2π périodique.

Remarque : en fait f est même π -périodique.

$$f(-x) = \arcsin(1 - 2 \cos^4(-x)) = \arcsin(1 - 2 \cos^4(x)) = f(x)$$

Donc f est paire.

Par conséquent on étudiera f sur $I = [0, \pi]$.

3. On pose $u(x) = 1 - 2 \cos^4(x)$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

$$u'(x) = 8 \cos^3(x) \sin(x)$$

$$1 - (u(x))^2 = 1 - (1 - 2 \cos^4(x))^2 = 1 - (1 - 4 \cos^4(x) + 4 \cos^8(x))$$

$$= 4 \cos^4(x) - 4 \cos^8(x) = 4 \cos^4(x) (1 - \cos^4(x))$$

$$= 4 \cos^4(x) (1 - \cos^2(x))(1 + \cos^2(x)) = 4 \cos^4(x) \sin^2(x) (1 + \cos^2(x))$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8 \cos^3(x) \sin(x)}{\sqrt{4 \cos^4(x) \sin^2(x) (1 + \cos^2(x))}} = \frac{8 \cos^3(x) \sin(x)}{2 \cos^2(x) |\sin(x)| \sqrt{1 + \cos^2(x)}} \\ &= \frac{8 \cos(x) \sin(x)}{2 |\sin(x)| \sqrt{1 + \cos^2(x)}} \end{aligned}$$

Il y aura évidemment un problème en 0^+ et en π^- . Et sur $]0, \pi[$, $\sin(x) > 0$ donc $|\sin(x)| = \sin(x)$

Finalement pour tout $x \in]0, \pi[$

$$f'(x) = \frac{4 \cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}}$$

4.

$$f'(x) = \frac{4 \cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sqrt{1 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} \frac{-4}{\sqrt{1 + 1^2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

Pour toutes les autres valeurs de I , f est dérivable, par conséquent f est dérivable sur $]0, \pi[$.

5. Sur $]0, \pi[$, $\sin(x) > 0$ et pour tout $x \in I$, $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

D'après l'expression

$$f'(x) = \frac{4 \cos(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}}$$

$f'(x)$ a le même signe que $\cos(x)$, c'est-à-dire strictement positif sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et strictement négatif sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

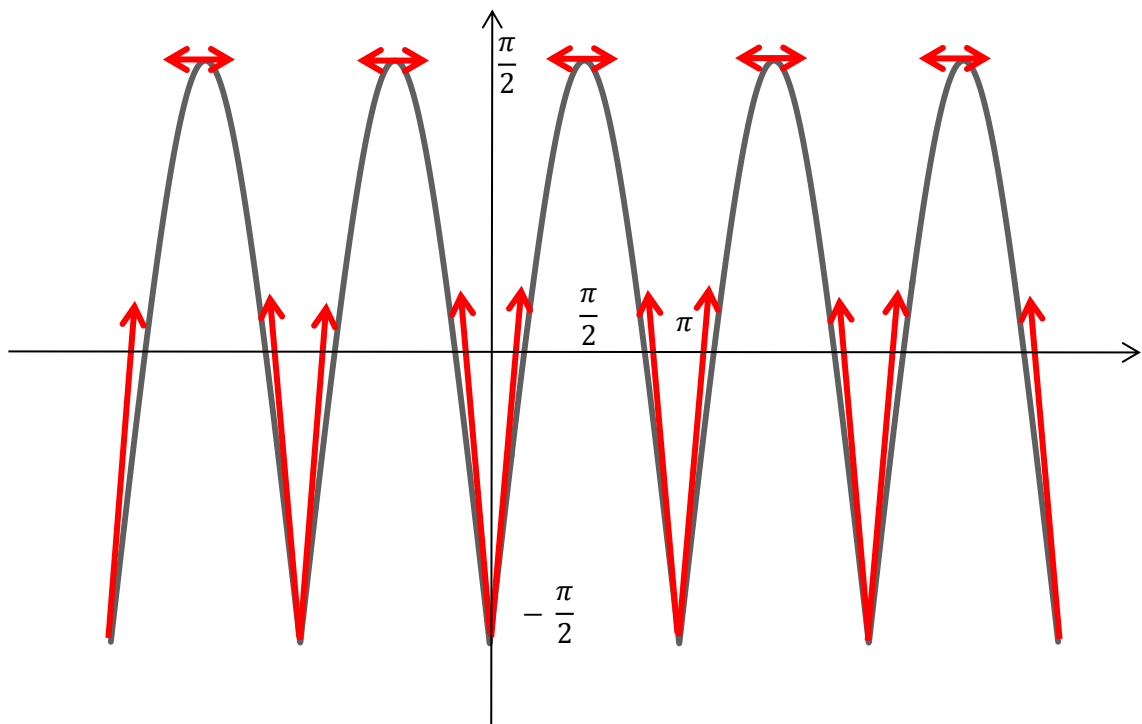
$$f(0) = \arcsin(1 - 2 \cos^4(0)) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arcsin\left(1 - 2 \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(\pi) = \arcsin(1 - 2 \cos^4(\pi)) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

6.



Exercice 9.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude.

- Calculer f' la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème.
- Montrer que f n'est pas dérivable en $x = 1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de f au point d'abscisse $x = 1$?
- Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R}^+ , avec les limites et les valeurs de f aux points remarquables.
- Tracer le graphe de f sur \mathbb{R} .

Correction exercice 9.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2 = 1 - \frac{4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)^2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2 \geq 0$$

Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2 \leq 1$$

Ce qui montre que f est définie sur \mathbb{R} .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{(-x)^2 + 1}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

f est impaire, on l'étudiera sur \mathbb{R}^+ .

- On pose $u(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, alors $u'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = 2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}} = \frac{2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2}} = \frac{2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}}{\frac{|x^2 - 1|}{|x^2 + 1|}} = \frac{2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}}{\frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}} = 2 \frac{1 - x^2}{|x^2 - 1|} \times \frac{1}{x^2 + 1}$$

- Pour $x \in [0, 1[$, $x^2 - 1 < 0$, donc $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1) = 1 - x^2$ et alors

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Pour $x \in]1, +\infty[$, $x^2 - 1 > 0$, donc $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ et alors

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$$

Ce qui montre que f n'est pas dérivable en $x = 1$.

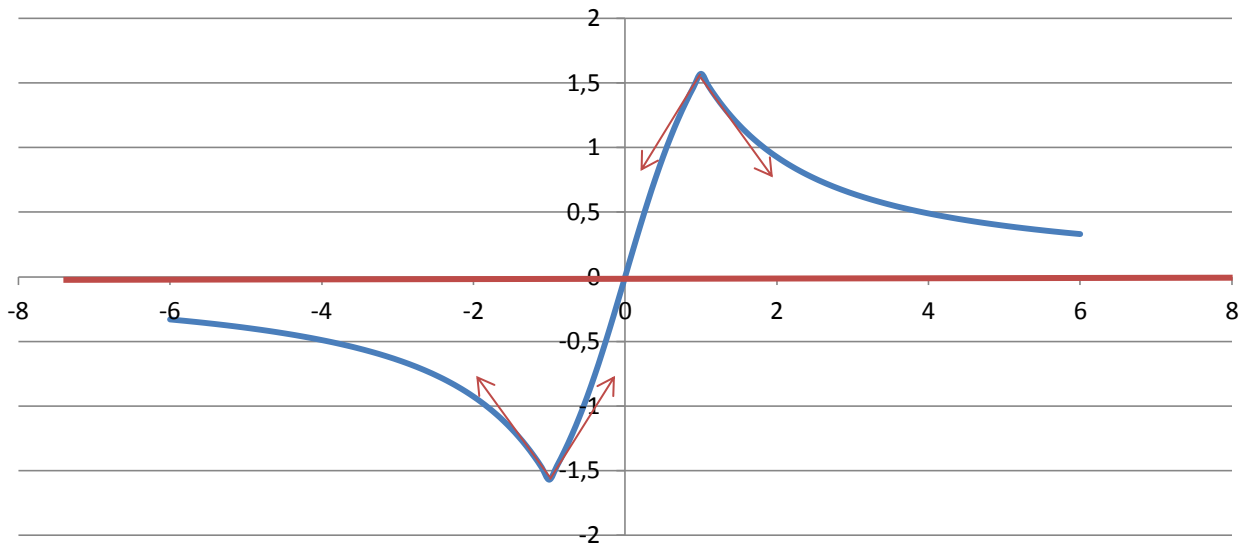
Le graphe de f admet des demi-tangentes obliques en ce point.

-

$$f(0) = \arcsin(0) = 0; \quad f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0	$\frac{\pi}{2}$	0

-



Exercice 10.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(t) = \arcsin(\sin(2t))$

Étudier la parité et la périodicité de g , sur quel intervalle peut-on l'étudier, puis montrer que

$g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = g(t)$, en déduire un axe de symétrie. Finalement étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et tracer le graphe de g sur \mathbb{R} (au moins sur trois périodes). On donnera l'expression de g sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

Correction exercice 10.

$$g(-t) = \arcsin(\sin(-2t)) = -g(t)$$

Donc g est impaire.

$$g(t + \pi) = \arcsin(\sin(2(t + \pi))) = \arcsin(\sin(2t + 2\pi)) = g(t)$$

Donc g est π périodique.

On peut donc étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \arcsin\left(\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)\right) = \arcsin(\sin(\pi - 2t)) = \arcsin(-\sin(-2t)) \\ &= -\arcsin(\sin(-2t)) = -\arcsin(-\sin(2t)) = g(t) \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $t = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie et on peut étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq 2t \leq \frac{\pi}{2}$$

Ce qui entraîne que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g(t) = 2t$

Pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(t) = g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \pi - 2t$, car $\frac{\pi}{2} - t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Graphe de g

