Feuille d'exercices 8
Intégrales théoriques

Exercice 1.

Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

Correction exercice 1.

$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$

$u'(t)=\sin(nt)$ $\qquad u(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$

$v(t) = f(t)$ $\qquad v'(t) = f'(t)$

$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\,f'(t)\right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right) f'(t)dt$

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\,f'(t)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt$$

$$= -\frac{1}{n}\cos(nb)\,f'(b) + -\frac{1}{n}\cos(na)\,f'(a) + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt$$

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt\right| \le \frac{1}{n}\int_a^b |\cos(nt)\,f'(t)|dt \le \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt$$

Car $|f'|$ est continue donc intégrable.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt = 0$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\cos(nb)\,f'(b) + -\frac{1}{n}\cos(na)\,f'(a)\right) = 0$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

Exercice 2.

Prouvé l'énoncé suivant :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$,(où $a<b$), à valeurs positives, telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$.

Correction exercice 2.

Supposons qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) > 0$, alors

Si $t_0 = a$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [a, a+\eta]$, $f(t) > 0$ car f est continue et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{a+\eta} f(t)dt + \int_{a+\eta}^b f(t)dt \geq \int_a^{a+\eta} f(t)dt > 0$$

Ce qui n'est pas possible

Si $t_0 \in]a, b[$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, $f(t) > 0$ car f est continue et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{a+\eta} f(t)dt + \int_{a-\eta}^{a+\eta} f(t)dt + \int_{a+\eta}^b f(t)dt \geq \int_{a-\eta}^{a+\eta} f(t)dt > 0$$

Ce qui n'est pas possible

Si $t_0 = b$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [b - \eta, b]$, $f(t) > 0$ car f est continue et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{b-\eta} f(t)dt + \int_{b-\eta}^b f(t)dt \geq \int_{b-\eta}^b f(t)dt > 0$$

Ce qui n'est pas possible

Par conséquent f est identiquement nulle.

Exercice 3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$).

Montrer que f est de signe constant si et seulement si $\int_a^b |f(t)|dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$.

On posera

$$f_+(t) = \max_{t\in[a,b]}(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f_-(t) = \max_{t\in[a,b]}(-f(t), 0)$$

Correction exercice 3.

On remarque que f_+ et f_- sont des fonctions continues et positives.

De plus

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = f_+(t) - f_-(t) \quad \text{et} \quad |f(t)| = f_+(t) + f_-(t)$$

Pour cela, il faut envisager deux cas

Si $f(t) \geq 0$,

$$f_+(t) - f_-(t) = \max_{t\in[a,b]}(f(t), 0) - \max_{t\in[a,b]}(-f(t), 0) = f(t) - 0 = f(t)$$
$$f_+(t) + f_-(t) = \max_{t\in[a,b]}(f(t), 0) + \max_{t\in[a,b]}(-f(t), 0) = f(t) + 0 = |f(t)|$$

Si $f(t) \leq 0$

$$f_+(t) - f_-(t) = \max_{t\in[a,b]}(f(t), 0) - \max_{t\in[a,b]}(-f(t), 0) = 0 - \big(-f(t)\big) = f(t)$$
$$f_+(t) + f_-(t) = \max_{t\in[a,b]}(f(t), 0) + \max_{t\in[a,b]}(-f(t), 0) = 0 - f(t) = |f(t)|$$

Cela marche.

Montrons que si f est de signe constant alors on a l'égalité demandé,

Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$ alors

$$\int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b f(t)dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

Car $|f(t)| = f(t)$ et $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq 0$ alors

$$\int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b \big(-f(t)\big)dt = -\int_a^b f(t)dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

Car $|f(t)| = -f(t)$ et $\int_a^b f(t)dt \leq 0$

Réciproque, on suppose que on a l'égalité

$$\int_a^b |f(t)|dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right| \Rightarrow \int_a^b \big(f_+(t) + f_-(t)\big)dt = \left|\int_a^b \big(f_+(t) - f_-(t)\big)dt\right| \Rightarrow \int_a^b f_+(t)dt + \int_a^b f_-(t)dt = \left|\int_a^b f_+(t)dt - \int_a^b f_-(t)dt\right|$$

Soit A et B deux réels

$$A + B = |A - B| \Rightarrow (A + B)^2 = (A - B)^2 \Rightarrow A^2 + 2AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2 \Rightarrow AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

On pose $A = \int_a^b f_+(t)dt$ et $B = \int_a^b f_-(t)dt$, d'après la remarque précédente $\int_a^b f_+(t)dt = 0$ ou $\int_a^b f_+(t)dt = 0$ et d'après l'exercice 2, f_+ ou f_- est identiquement nulle, donc f est de signe constant.

Exercice 4.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ tend vers $\frac{1}{2}f(0)$.

Correction exercice 4.

On pose

$$F(x) = \int_0^x tf(t)dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\frac{F(x)}{x^2}$ est une forme indéterminée, d'après la règle de L'Hospital, si la limite des dérivées existe et est finie alors $\frac{F(x)}{x^2}$ tend vers cette limite.

$$\frac{F'(x)}{(x^2)'} = \frac{xf(x)}{2x} = \frac{f(x)}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{f(0)}{2}$$

Car $t \to tf(t)$ est continue implique que $F'(x) = xf(x)$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \frac{f(0)}{2}$$

Exercice 5.

1. Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t)\, dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   On coupera l'intégrale entre 0 et α_n et entre α_n et $\frac{\pi}{2}$ avec $\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}$

Correction exercice 5.

1. $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], |\sin(t)| \le \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$|u_n - 0| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t)\, dt\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin^n(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin(t)^n|dt \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n dt = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Car $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2. La même technique ne marche pas parce que on ne peut majorer $\sin(t)$ que par 1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}\sin^n(t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt$$

Puis on va montrer que ces deux intégrales tendent vers 0.

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt\right|=\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt\le\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Pour l'autre, $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right]$, $|\sin(t)|\le\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)=\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$

Ce qui entraine que

$$|\sin^n(t)|^n\le\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)^n=e^{n\ln\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)}=e^{n\ln\left(1-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^2}{2}+o\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^2\right)\right)}=e^{n\ln\left(1-\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{2}+o\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$

$$=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}=e^{n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}=e^{-\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

On en déduit que :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}\sin^n(t)\,dt\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}|\sin^n(t)|dt\le\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}|\sin^n(t)|^n dt\le\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)^n dt$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}dt<e^{-\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\frac{\pi}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

u_n est la somme de deux intégrales qui tendent vers 0 donc elle tend vers 0.

Exercice 6.

1. Calculer $I=\int_0^1\ln(1+t^2)\,dt$
2. On pose, pour tout $n\ge 1$, un entier

$$u_n=\int_0^1\sqrt[n]{1+t^2}dt$$

Calculer la limite de u_n.

3. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, prouver que pour tout $u\ge 0$,

$$|e^u-1-u|\le\frac{1}{2}u^2e^u$$

4. En déduire que pour tout $t\in[0,1]$,

$$\left|\sqrt[n]{1+t^2}-1-\frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right|\le\frac{1}{n^2}$$

Puis trouver un équivalent de u_n-1.

Correction exercice 6.

1. Par parties

$$I=\int_0^1 1\times\ln(1+t^2)\,dt$$

$I = \int_0^1 1 \times \ln(1+t^2)\,dt$
$u'(t) = 1$ $\qquad$ $u(t) = t$
$v(t) = \ln(1+t^2)$ $\qquad$ $v'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$
$I = [t\ln(1+t^2)]_0^1 -$ $\qquad$ $\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$
Donc

$$I = [t\ln(1+t^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \ln(2) - 0 - 2\int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt$$
$$= \ln(2) - 2\left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) = \ln(2) - 2 + [\arctan(t)]_0^1$$
$$= \ln(2) - 2 + \arctan(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{4}$$

2.

$$0 \le t \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+t^2 \le 2 \Rightarrow 1^{\frac{1}{n}} \le (1+t^2)^{\frac{1}{n}} \le 2^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{1+t^2} \le e^{\frac{1}{n}\ln(2)} \Rightarrow \int_0^1 dt$$
$$\le \int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2}\,dt \le \int_0^1 e^{\frac{1}{n}\ln(2)}\,dt \Rightarrow 1 \le u_n \le e^{\frac{1}{n}\ln(2)}$$

Comme $e^{\frac{1}{n}\ln(2)} \to e^0 = 1$, d'après le théorème des gendarmes $u_n \to 1$

3. L'exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Taylor à n'importe quel ordre. Il existe $c \in]0, u[$ tel que :

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + f''(c)\frac{u^2}{2}, \quad \text{avec } f(u) = e^u$$

Autrement dit

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2}e^c \Leftrightarrow e^u - 1 - u = \frac{u^2}{2}e^c$$
$$0 < c < u \Rightarrow 1 < e^c < e^u \Rightarrow \frac{u^2}{2} < \frac{u^2}{2}e^c < \frac{u^2}{2}e^u \Rightarrow \frac{u^2}{2} < e^u - 1 - u < \frac{u^2}{2}e^u \Rightarrow 0 < e^u - 1 - u$$
$$< \frac{u^2}{2}e^u \Rightarrow |e^u - 1 - u| < \frac{u^2}{2}e^u \Rightarrow |e^u - 1 - u| \le \frac{u^2}{2}e^u$$

4. On pose $u = \frac{1}{n}\ln(1+t^2)$

$$e^{\frac{1}{n}\ln(1+t^2)} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2) = \sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)$$
$$\frac{u^2}{2}e^u = \frac{\left(\frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right)^2}{2}e^{\frac{1}{n}\ln(1+t^2)} \le \frac{1}{2n^2}(\ln(2))^2 e^{\frac{1}{n}\ln(2)} \le \frac{1}{2n^2}(\ln(2))^2 e^{\ln(2)} = \frac{1}{2n^2}(\ln(2))^2 2$$
$$= \frac{1}{n^2}(\ln(2))^2 \le \frac{1}{n^2}$$

On en déduit que

$$\left|\sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right| \le \frac{1}{n^2}$$
$$u_n - 1 = \int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2}\,dt - \int_0^1 dt = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{1+t^2} - 1\right)dt$$

« Il manque » le « $\frac{1}{n}\ln(1+t^2)$ » dans l'intégrale, mais comme on a calculé $I = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$ au premièrement, cela peut faire penser à introduire $-\frac{1}{n}I$

$$u_n - 1 - \frac{1}{n}I = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{1+t^2} - 1\right)dt - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right)dt$$

Alors

$$\left|u_n - 1 - \frac{1}{n}I\right| = \left|\int_0^1 \left(\sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right)dt\right| \leq \int_0^1 \left|\sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right| dt$$
$$\leq \int_0^1 \frac{1}{n^2}dt = \frac{1}{n^2}$$

Si on en savait plus sur les équivalents, cela suffirait pour affirmer que

$$u_n - 1 \sim \frac{I}{n}$$

On va développer un peu

$$\left|\frac{u_n - 1 - \frac{1}{n}I}{\frac{1}{n}I}\right| \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}I} = \frac{1}{nI} \to 0$$

Donc

$$\left|\frac{u_n - 1}{\frac{1}{n}I} - 1\right| \to 0$$

Ce qui montre bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - 1}{\frac{1}{n}I} = 1$$

Et que

$$u_n - 1 \sim \frac{I}{n}$$

Exercice 7.

Soit f de $[0,1]$ vers $[0,1]$ une application continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que :

$$\int_0^1 f(t)dt = f(1)$$

Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

On pourra utiliser la fonction g définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$$

Correction exercice 7.

$x \to \int_0^x f(t)dt$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, par suite g a les mêmes propriétés. De plus

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = f(1) - \int_0^1 f(t)dt = 0$$

On peut appliquer le théorème de Rolle.

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x)$$

Il existe $c \in]0,x[$ tel que $g'(c) = 0$, autrement dit $cf'(c) = 0$ et comme $c \neq 0$, on a $f'(c) = 0$

Exercice 8.

On désigne par f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel k strictement positif, tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on ait :

$$0 \leq f(x) \leq k\int_0^x f(t)dt$$

1. On définit l'application H de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout x de $\mathbb{R}^+$:
$$H(x) = e^{-kx}\int_0^x f(t)dt$$
Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $H'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $H(x) = 0$.
En déduire que f est l'application nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Correction exercice 8.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $x \to \int_0^x f(t)dt$ est dérivable (et même C^1), H est le produit de deux fonctions dérivable, elle est dérivable.
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, H'(x) = -ke^{-kx}\int_0^x f(t)dt + e^{-kx}f(x)$$
2. D'après les hypothèses
$$f(x) \leq k\int_0^x f(t)dt \Rightarrow -k\int_0^x f(t)dt + f(x) \leq 0 \Rightarrow -ke^{-kx}\int_0^x f(t)dt + e^{-kx}f(x) \leq 0 \Rightarrow H'(x) \leq 0$$
Comme $H(0) = 0$, cela entraine que $\forall x \in \mathbb{R}^+, H(x) \leq 0$, mais $f(x) \geq 0$ (d'après les hypothèses) donc $H(x) \geq 0$, par conséquent $H(x) = 0$.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+, H'(x) = 0$ et comme
$$H'(x) = -ke^{-kx}\int_0^x f(t)dt + e^{-kx}f(x) = -kH(x) + e^{-kx}f(x)$$
Cela entraine que $e^{-kx}f(x) = 0$, et que donc f est identiquement nulle.

Exercice 9.

On définit une application f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = \frac{t-1}{\ln(t)}, \quad \text{si} \quad 0 < t < 1, f(0) = 0, f(1) = 1$$
Et une application F de $]0,1[$ vers $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]$.
2. Soit x dans l'intervalle $]0,1[$. Quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4.
   a) Pour $x \in]0,1[$, montrer que
   $$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}dt = \ln(2)$$
   b) Pour tout $x \in]0,1[$, montrer que
   $$x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)$$
   c) En déduire l'existence et la valeur de la limite
   $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x)$$
5. Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (avec $x > 0$).
6.
   a) Montrer que quand ϵ tend vers 0 (avec $0 < \epsilon < 1$)

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f(t)dt \to \int_0^1 f(t)dt$$

b) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^1 f(t)dt$$

Correction exercice 9.

1. Pour tout $t \in]0,1[$, $\ln(t) > 0$ donc f est définie et continue. Il y a deux problème, en $t = 0$ et $t = 1$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t-1}{\ln(t)} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0

On pose $u = t - 1$,$t = u + 1$

$$\frac{t-1}{\ln(t)} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{u}{u+o(u)} = \frac{u}{u\big(1+o(1)\big)} = \frac{1}{1+o(1)} \underset{\substack{u\to 0\\ t\to 1}}{\longrightarrow} 1 = f(1)$$

Donc f est continue en 1

2. $\forall x \in]0,1[,\ x^2 < x$ donc on « n'est pas dans le bon sens »

$$\forall t \in]0,1[, \frac{1}{\ln(t)} > 0$$

Par conséquent

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt > 0 \Rightarrow -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt < 0$$

3. $t \to \frac{1}{\ln(t)}$ est continue et $x \to x^2$ est dérivable donc F est dérivable (et même C^1). Pour tout $x \in]0,1[$

$$F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} = f(x)$$

4.

a. $\forall x \in]0,1[$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt = \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x))$$

$$= \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln\left(\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right) = \ln(2)$$

b. $\forall x \in]0,1[$

$$x^2 < t < x \Rightarrow x^2\ln(t) > t\ln(t) > x\ln(t)$$

Car $\ln(t) < 0$

$$x^2 < t < x \Rightarrow 0 > x^2\ln(t) > t\ln(t) > x\ln(t) \Rightarrow 0 > \frac{1}{x^2\ln(t)} < \frac{1}{t\ln(t)} < \frac{1}{x\ln(t)}$$

Car les trois termes sont de même signe

$$x^2 < t < x \Rightarrow \int_{x^2}^{x} \frac{1}{x^2\ln(t)} dt \le \int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)} dt \le \int_{x^2}^{x} \frac{1}{x\ln(t)} dt$$

Car $x^2 < x$

$$x^2 < t < x \Rightarrow -\frac{1}{x^2}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \le -\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt \le -\frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \Rightarrow \frac{1}{x^2}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

$$\ge \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt \ge \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \Rightarrow \frac{1}{x^2}F(x) \ge \ln(2) \ge \frac{1}{x}F(x)$$

D'après la première inégalité

$$\frac{1}{x^2}F(x) \geq \ln(2) \Rightarrow F(x) \geq x^2 \ln(2)$$

D'après la seconde

$$\ln(2) \geq \frac{1}{x}F(x) \Rightarrow x\ln(2) \geq F(x)$$

En réunissant ces deux inégalités on a :

$$x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)$$

c. D'après les inégalités du b. et le théorème des gendarmes

$$\ln(2) \leq \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x) \leq \ln(2)$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x) = \ln(2)$$

5. D'après les inégalités du 4 b. et le théorème des gendarmes

$$0 \leq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x) \leq 0$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x) = 0$$

6.
   a. f est continue donc $\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f(t)dt \to \int_0^1 f(t)dt$
   b. Pour $x \in]0,1[$, F est une primitive de f, donc

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f(t)dt = [F(t)]_{\epsilon}^{1-\epsilon} = F(1-\epsilon) - F(\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

Exercice 10.

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$$

Correction exercice 10.

1. Il faut majorer $\frac{x^n}{1+x}$, il y a deux options, soit majorer le numérateur, soit minorer le dénominateur, et on doit pouvoir trouver une primitive du majorant. $x^n \leq 1$, je ne vois pas mieux, et alors

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow 0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

Et là on est coincé, il n'y a plus de n, et la valeur à gauche et à droite sont distinctes cela ne donne rien. On va minorée le dénominateur $\frac{1}{1+x^2}$, il y a deux possibilités :

Pour tout $n \geq 0$

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+0} = 1 \Rightarrow 0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Donc $I_n \to 0$

Ou

Pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{0+x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 \frac{x^n}{x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} \to 0$$

Donc $I_n \to 0$

Je préfère la première possibilité, mais les deux marchent.

2.

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n+1}$$

3.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$$

En intégrant entre 0 et 1.

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}\right) dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^{n+1} I_n$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_n$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{(-1)^0}{0+1} + \frac{(-1)^1}{1+1} + \frac{(-1)^2}{2+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n \to \ln(2)$$

Exercice 11.

Soit F la fonction définie pour tout $x > 1$ par

$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{\ln(1+t)}$$

1. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t > 0$:
$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$$
2. En déduire que pour tout $x \in \left]1, \sqrt{3}\right[$:
$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \ln(1+x) + \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right)$$

Puis

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x)$$

3. Calculer, pour tout > 1, $F'(x)$.
4. En déduire que pour tout $x > 1$, $F(x) > \ln(2)$.

Correction exercice 11.

1. On pose $f(t) = \ln(1+t)$ pour tout $t > 0$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre, donc avec un reste à l'ordre 2.
$$f'(t) = \frac{1}{1+t} \qquad \text{et} \qquad f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$$
Il existe $c \in]0, t[$ tel que
$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(c) = t - \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{(1+c)^2}$$
Il est clair que $f(t) < t$ et d'autre part
$$0 < c < t \Rightarrow 1 < 1 + c < 1 + t \Rightarrow 1 < (1+c)^2 < (1+t)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} < \frac{1}{(1+c)^2} < 1 \Rightarrow \frac{-t^2}{2(1+t)^2}$$
$$> -\frac{t^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2} > -\frac{t^2}{2} \Rightarrow t - \frac{-t^2}{2(1+t)^2} > t - \frac{t^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2} > t - \frac{t^2}{2}$$
L'inégalité de droite montre que $\ln(1+t) > t - \frac{t^2}{2}$. On a donc montré les deux inégalités.

2. Pour tout $x \in]1, \sqrt{3}[$
$$1 < x < \sqrt{3} \Rightarrow 1 < x < x^2 < 3 \Rightarrow 0 < x - 1 < t < x^2 - 1 < 2$$
Comme $t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2 - t)$ est le produit de deux réels positifs ($t > 0$ et $2 - t > 0$), $t - \frac{t^2}{2} > 0$
$$0 < t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$$
$$\Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{\ln(1+t)} < \frac{1}{t - \frac{t^2}{2}}$$
$$\Rightarrow \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{t} \le \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{\ln(1+t)} \le \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{t - \frac{t^2}{2}}$$
$$\Rightarrow [\ln(t)]_{x-1}^{x^2-1} \le F(x) \le \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{-2}{t(t-2)} dt$$
$$\Rightarrow \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) \le F(x) \le \int_{x-1}^{x^2-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right) dt$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \le F(x) \le [\ln(t) - \ln|t-2|]_{x-1}^{x^2-1}$$
$$\Rightarrow \ln(x+1) \le F(x) \le \ln(x+1) - \ln|x^2 - 3| + \ln|x - 3| = \ln(1+x) + \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right)$$
Ce qui est bien l'inégalité demandée.
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right) = \ln\left(\frac{|-2|}{|-2|}\right) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(1+x) = \ln(2)$$
Par conséquent
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x) = \ln(2)$$

3. Pour tout $x > 1$
$$F'(x) = \frac{2x}{\ln(1 + x^2 - 1)} - \frac{1}{\ln(1 + x - 1)} = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

4. $x > 1$ entraine que $x - 1 > 0$ et que $\ln(x) > 1$, donc $F'(x) > 0$, F est une fonction strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et $\lim_{x\to 1} F(x) = \ln(2)$, par conséquent, pour tout $x > 1$, on a $F(x) > \ln(2)$.

Exercice 12.

Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in I$, par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} dt$$

Première partie

Dans cette partie on ne cherchera pas à exprimer f à l'aide de fonctions usuelles

1. Déterminer le signe de $f(x)$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur I, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$, on exprimera $f'(x)$ de la manière la plus simple possible.
3.
   a) Montrer que pour tout $t \in I$,

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

   b) En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Deuxième partie

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles de la façon la plus simple possible.

Correction exercice 12.

Première partie

1. Si $x > 1$ alors $x^2 > x$ et si $t \geq x > 1$ alors $\ln(t) > 0$ donc $f(x) > 0$
2.

$$t \to \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$$

Est continue et $x \to x^2$ est dérivable donc f est dérivable (et même C^1).

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2)}{(x^2-1)^2} \times 2x - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{4x\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2} - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(4x - (x+1)^2)$$

$$= \frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(4x - x^2 - 2x - 1) = -\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(x^2 - 2x + 1)$$

$$= -\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$$

3.
   a) La formule de Taylor Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t > 1$ dit qu'il existe $c \in]1, t[$ tel que

$$\ln(t) = \ln(1) + (t-1)\ln'(1) + \frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c) \Leftrightarrow \ln(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2}$$

$$1 < c < t \Leftrightarrow 1 < c^2 < t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} < \frac{1}{c^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2} < \frac{(t-1)^2}{2c^2} < \frac{(t-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2} < -\frac{(t-1)^2}{2c^2} < -\frac{(t-1)^2}{2t^2} \Leftrightarrow t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2} < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

$$\Leftrightarrow t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<t-1$, on a bien

$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$

b) On divise par $(t-1)^2>0$

$$\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}<\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}<\frac{1}{t-1}$$

Comme $x<x^2$ on intègre

$$\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\right)dt\leq f(x)\leq\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt\Leftrightarrow\left[\ln(t-1)-\frac{t}{2}\right]_x^{x^2}\leq f(x)\leq[\ln(t-1)]_x^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow\ln(x^2-1)-\frac{x^2}{2}-\ln(x-1)+\frac{x}{2}\leq f(x)\leq\ln(x^2-1)-\ln(x-1)$$

$$\Leftrightarrow\ln(x+1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\leq f(x)\leq\ln(x+1)$$

On fait tendre x vers 1^+ et on trouve que

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\ln(2)$$

Deuxième partie

1.

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t)\,dt$$

$\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t)\,dt$

$u'(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$ $\qquad u(t)=-\frac{1}{t-1}$

$v(t)=\ln(t)$ $\qquad v'(t)=\frac{1}{t}$

$f(x)=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}\right]-$ $\qquad \int-\frac{1}{(t-1)t}dt$

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}\right]-\int-\frac{1}{(t-1)t}dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}+\int\frac{1}{t(t-1)}dt$$

Or

$$\frac{1}{t(t-1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{1}{t-1}\right]_{t=0}=-1$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$b=\left[\frac{1}{t}\right]_{t=1}=1$$

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}+\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}-\ln(t)+\ln(t-1)$$

2.

$$f(x) = \left[-\frac{\ln(t)}{t-1} - \ln(t) + \ln(t-1)\right]_x^{x^2}$$
$$= -\frac{\ln(x^2-1)}{x^2-1} - \ln(x^2) + \ln(x^2-1) - \left(-\frac{\ln(x)}{x-1} - \ln(x) + \ln(x-1)\right)$$
$$= -\frac{\ln(x^2)}{x^2-1} + \frac{\ln(x)}{x-1} - 2\ln(x) + \ln(x) + \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$
$$= -\frac{2\ln(x)}{(x-1)(x+1)} + \frac{\ln(x)}{x-1} - \ln(x) + \ln\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right)$$
$$= \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)}(-2+x+1) - \ln(x) + \ln(x+1)$$
$$= \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)}(x-1) - \ln(x) + \ln(x+1) = \frac{\ln(x)}{x+1} - \ln(x) + \ln(x+1)$$
$$= \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\ln(x)$$

Exercice 13.

Soit F la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par
$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sin(t)}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis qu'elle est de classe C^1 sur cet intervalle.
2. Calculer $F'(x)$, en déduire les variations de F sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t \in [x, 2x] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (c'est-à-dire pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$).
$$0 < t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$
4. En déduire que
$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$$
5. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$$\ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)$$
6. En déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Correction exercice 13.

Remarque : il est sans doute possible de faire cet exercice d'une autre façon si on sait qu'une primitive de $t \to \frac{1}{\sin(t)}$ est $t \to \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

1.
$$x \le t \le 2x \Rightarrow 0 < x \le t \le 2x < 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow 0 < \sin(t)$$
Donc $t \to \frac{1}{\sin(t)}$ est continue sur $[x, 2x]$, ce qui montre que F est définie, continue et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2.
$$F'(x) = \frac{2}{\sin(2x)} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{2}{2\sin(x)\cos(x)} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

Pour tout $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $1-\cos(x) > 0$, $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$, donc $F'(x) > 0$

Cette fonction est strictement croissante.

3. comme sin est C^∞ sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\sin(t) = \sin(0) + t\sin'(0) + \frac{t^2}{2}\sin''(c)$$

Donc

$$\sin(t) = t - \frac{t^2}{2}\cos(t)$$

Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cos(t) < 1$ donc

$$-\frac{t^2}{2} < -\frac{t^2}{2}\cos(t) < 0$$

Ce qui entraine que

$$t - \frac{t^2}{2} < t - \frac{t^2}{2}\cos(t) < t$$

Autrement dit

$$t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

D'autre part

$$t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2-t)$$

$$t > 0 \text{ et } t < \frac{\pi}{2} < 2$$

Entraine que $t - \frac{t^2}{2} > 0$

4.

Par conséquent

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t - \frac{t^2}{2}} = \frac{2}{t(2-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}$$

A l'aide d'une décomposition en élément simple.

5.

On intègre entre x et $2x$ (on a bien $x < 2x$)

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sin(t)} < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right) dt \Leftrightarrow [\ln(t)]_x^{2x} < F(x) < [\ln(t) - \ln(t-2)]_x^{2x}$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x) - \ln(x) < F(x) < \ln(2x) - \ln(2x-2) - (\ln(x) + \ln(x-2)) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{x}\right)$$
$$< F(x) < \ln\left(\frac{2x}{x}\right) - \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right) \Leftrightarrow \ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$$

6.

Comme

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right) = \ln(1) = 0$$

On a d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \ln(2)$$

Exercice 14.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$.
Soit g une fonction définie sur $[0, a]$ par :

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$$

1. Montrer que g est dérivable.
2. Calculer g' et en déduire g.

Correction exercice 14.

1. f est continue donc $x \to \int_0^x f(t)dt$ est dérivable, f est strictement monotone et continue donc admet une bijection réciproque continue f^{-1} et f est dérivable par conséquent $x \to \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ est dérivable et enfin $x \to xf(x)$ est dérivable, ce qui fait de g une fonction dérivable.
2. $g'(x) = f(x) + f^{-1}\big(f(x)\big)f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$
   g est donc constante sur un intervalle donc pour tout $x \in [0, a]$,
$$g(x) = g(0) = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt - 0f(0) = 0$$

Exercice 15.
Soit $0 < a < 1$. On considère

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx$$

1. Montrer que
$$\int_1^a \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx = -\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$

2. En déduire la valeur de I.

Correction exercice 15.

Remarque : les trois intégrales de cet exercice sont définies car $x \to \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$
$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$
$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{1} = 1$$
$$x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = a$$
$$\frac{\ln(x)}{1 + x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2(-\ln(t))}{t^2 + 1}$$
   Donc
$$\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx = \int_1^a \frac{t^2(-\ln(t))}{t^2 + 1} \frac{dt}{t^2} = -\int_1^a \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt = -\int_1^a \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx$$
2.

$$I=\int_a^{\frac{1}{a}}\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=\int_a^1\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx+\int_1^{\frac{1}{a}}\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=-\int_1^a\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx+\int_1^{\frac{1}{a}}\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=0$$

Exercice 16.

Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases}F(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt\\ F(0)=\ln(2)\end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x\neq 0$, F est dérivable.
2.
   a) A l'aide de la formule de Taylor Lagrange, montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$ il existe $c\in]-t,t[$ tel que :
   $$e^{-t}=1-te^{-c}$$
   b) En déduire que pour tout $t\in[-1,1]$, $t\neq 0$.
   $$\frac{1}{e}<\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{t}<e$$
   c) Trouver un encadrement de F et en déduire que F est continue en $x=0$.
3. Pour tout $x\neq 0$, calculer la dérivée F' de F. F est-elle dérivable en 0 ? que peut-on en déduire sur l'allure de le graphe de F ?
4. Etudier les variations de F.
5. Montrer que pour tout $t\geq 1$, $\frac{e^{-t}}{t}\leq e^{-t}$, en déduire une majoration de F et sa limite en $+\infty$.
6. En reprenant l'égalité du 2. a), montrer que pour tout $t<0$, $e^{-t}>1-t$ en déduire que pour tout $x<0$
$$F(x)>-\ln(2)-x$$

En déduire la limite de F en $-\infty$.

7. Tracer l'allure du graphe de F.

Correction exercice 16.

1. Si $x>0$, $0<x<2x$ et pour tout $t\in[x,2x]$, $t\to\frac{e^{-t}}{t}$ est continue donc F est de classe C^1.

Si $x<0$, $2x<x<0$ et pour tout $t\in[2x,x]$, $t\to\frac{e^{-t}}{t}$ est continue donc F est de classe C^1.

Donc pour tout $x\neq 0$, F est dérivable.

2.

a) $t\to e^{-t}$ est suffisamment dérivable pour admettre une formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1.

Il existe c dans l'intervalle $0,t$, c'est-à dire $]t,0[$ si $t<0$ et $]0,t[$ si $t>0$ (donc dans $]-|t|,|t|[$ tel que :

$$f(t)=f(0)+tf'(c)\Leftrightarrow e^{-t}=1+t(-e^{-c})=1-te^{-c}$$

b) Comme $-1<c<1$ on a : $-1<-c<1$ et donc $e^{-1}<e^{-c}<e^1$

D'autre part

$$e^{-c}=\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{t}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{1}{e}<\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{t}<e$$

c) Si $x>0$ alors $x<2x$

$$\int_x^{2x}\frac{1}{e}dt\leq\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt\leq\int_x^{2x}edt\Leftrightarrow\frac{1}{e}(2x-x)\leq\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt-F(x)\leq e(2x-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq [\ln(t)]_x^{2x} - F(x) \leq ex \Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq \ln(2x) - \ln(x) - F(x) \leq ex \Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq \ln(2) - F(x) \leq ex$$

Lorsque x tend vers 0^+, $\frac{x}{e}$ et ex tendent vers 0^+ donc $F(x)$ tend vers $\ln(2) = F(0)$ ce qui montre que F est continue à droite.

Si $x < 0$ alors $2x < x$

$$\int_{2x}^{x} \frac{1}{e} dt \leq \int_{2x}^{x} \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt \leq \int_{2x}^{x} e dt \Leftrightarrow \frac{1}{e}(x - 2x) \leq \int_{2x}^{x} \frac{1}{t} dt - \int_{2x}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e(x - 2x)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{e} \leq [\ln(t)]_{2x}^{x} + F(x) \leq -ex \Leftrightarrow -\frac{x}{e} \leq \ln(x) - \ln(2x) + F(x) \leq -ex \Leftrightarrow -\frac{x}{e} \leq -\ln(2) + F(x) \leq -ex$$

Lorsque x tend vers 0^-, $\frac{x}{e}$ et ex tendent vers 0^- donc $F(x)$ tend vers $\ln(2) = F(0)$ ce qui montre que F est continue à gauche.

Finalement F est continue en 0.

3.

$$F'(x) = \frac{e^{-2x}}{2x} \times 2 - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}}{x}(e^{-x} - 1)$$

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{x}(1 - x + o(x) - 1) = \frac{e^{-x}\big(-x + o(x)\big)}{x} = e^{-x}\big(-1 + o(1)\big)$$

$$\lim_{x \to 0} F'(x) = \lim_{x \to 0} e^{-x}\big(-1 + o(1)\big) = -1$$

Le graphe de F admet une tangente oblique en $x = 0$ de pente -1.

4. Si $x < 0$ alors $e^{-x} - 1 > 0$ et donc $F'(x) < 0$

Si $x > 0$ alors $e^{-x} - 1 < 0$ et donc $F'(x) < 0$

Si $x = 0$ alors $F'(0) = -1 < 0$

F est décroissante sur $\mathbb{R}$

5.

$$t \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{t} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$$

Donc, puisque si $x > 0$, $x < 2x$

$$0 \leq \int_{x}^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_{x}^{2x} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{2x} = -e^{-2x} + e^{-x} \to_{(x \to +\infty)} 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$$

6. Il existe $c \in]t, 0[$ tel que $e^{-t} = 1 - te^{-c}$

$$t < c < 0 \Leftrightarrow 0 < -c < -t \Leftrightarrow e^0 < e^{-c} < e^{-t} \Rightarrow 1 < e^{-c} \Rightarrow -t < -te^{-c}$$

Car $-t > 0$, puis on rajoute 1 de chaque côté pour obtenir

$$1 - t < 1 - te^{-c} = e^{-t}$$

On multiplie cette inégalité par $t < 0$

$$\frac{1 - t}{t} > \frac{e^{-t}}{t}$$

Ensuite on intègre entre $2x$ et x, car pour $x < 0$, $2x < x$

$$\int_{2x}^{x} \frac{1 - t}{t} dt > \int_{2x}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{x} \left(\frac{1}{t} - 1\right) dt > -F(x) \Leftrightarrow [\ln(t) - t]_{2x}^{x} > -F(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - x - (\ln(2x) - 2\mathrm{x}) > -F(x) \Leftrightarrow x - \ln\left(\frac{x}{2x}\right) > -F(x) \Leftrightarrow F(x) > -x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -x - \ln(2)$$

Comme

$$\lim_{x \to -\infty} -\ln(2) - x = +\infty$$

On a

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$$

7.