

FONDAMENTAUX DES MATHÉMATIQUES II

2019-2020

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET LES ESPACES VECTORIELS

Question 1 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (1, -1, -1), u_2 = (2, 0, 1), u_3 = (-1, -1, 1), u_4 = (3, 1, 0).$$

Alors

- \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 .
 aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 2 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (1, -1, -1), u_3 = (2, -1, 1), u_4 = (3, -2, 0).$$

Alors

- \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 .
 \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 . aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 3 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, 0, 0), u_3 = (2, 0, -1), u_4 = (1, -1, 0).$$

Alors

- \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 .
 aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 4 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (1, 1, 1).$$

Alors

- \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 . aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 .
 \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 5 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (2, -1, 1), u_3 = (1, 0, 1), u_4 = (1, -1, -1).$$

Alors

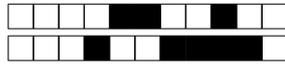
- aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 .
 \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 6 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (2, 1, -1), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1), u_4 = (2, 1, 2).$$

Alors

- \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 .
 aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 .



Question 7 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (-1, 0, 1), u_3 = (0, -1, 1), u_4 = (-1, 1, 0).$$

Alors

- \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 .
 aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .
 \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 8 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (-1, 0, 1), u_2 = (2, 0, 3), u_3 = (3, 0, 2), u_4 = (1, 0, 1).$$

Alors

- \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 . aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 .
 \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 9 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (-1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 0), u_4 = (0, 1, 1).$$

Alors

- aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .
 \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 10 Soient $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ quatre familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 avec

$$u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (1, 1, 2).$$

Alors

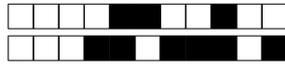
- \mathcal{F}_3 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_4 est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_2 est une base de \mathbb{R}^3 .
 aucune de ces familles n'est une base de \mathbb{R}^3 . \mathcal{F}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 11 Soit $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0\} \cap \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 3y + 5z + 6t = 0\}$. Trouver une base de V . En déduire $\dim_{\mathbb{R}} V$.

Question 12 Soit $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{5}t = 0\}$. Trouver une base de V . En déduire $\dim_{\mathbb{R}} V$.

Question 13 Soit $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{5}t = 0\}$. Trouver une base de V .

Question 14 Soit $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y + z + t = 0\}$. Trouver une base de V . En déduire $\dim_{\mathbb{R}} V$.



Question 15 Soit $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\}$. Trouver une base de V . En déduire $\dim_{\mathbb{R}} V$.

Question 16 Soit $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 4z + 5t = 0\}$. Trouver une base de V . En déduire $\dim_{\mathbb{R}} V$.

Question 17 Soient

$$u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (2, 2, 0), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (1, 1, 2)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_1, u_2) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 Aucune de ces familles n'est libre.

Question 18 Soient

$$u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (2, 1, 2), u_4 = (0, 1, 0)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Aucune de ces familles n'est libre.
 (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Question 19 Soient

$$u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (1, 0, 0), u_4 = (2, -4, 2)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Aucune de ces familles n'est libre.
 (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Question 20 Soient

$$u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (2, -1, 1), u_3 = (1, 0, 1), u_4 = (3, -1, 2)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

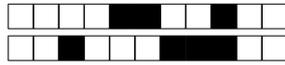
- (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Aucune de ces familles n'est libre.
 (u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Question 21 Soient

$$u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (2, -1, 1), u_3 = (1, 0, 1), u_4 = (1, -1, 1)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 $(u_2, u_3, u_2 + u_3)$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 Aucune de ces familles n'est libre.



Question 22 Soient

$$u_1 = (-1, 0, 2), u_2 = (1, 1, -2), u_3 = (0, 1, 0), u_4 = (1, 2, -2)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Aucune de ces familles n'est libre.
 $(u_1 + u_2, u_2, u_3)$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Question 23 Soient

$$u_1 = (-1, 0, 1), u_2 = (2, 0, 3), u_3 = (1, 0, 2), u_4 = (3, 0, 5)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Aucune de ces familles n'est libre.
 (u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Question 24 Soient

$$u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (0, 1, 2), u_4 = (1, 0, 3)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Aucune de ces familles n'est libre.
 (u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Question 25 Soient

$$u_1 = (1, -1, -1), u_2 = (-1, 1, 1), u_3 = (-1, -1, 1), u_4 = (-1, 0, 1)$$

quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Aucune de ces familles n'est libre.
 (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Question 26 Soient

$$u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, 0, 0), u_3 = (2, 0, 0), u_4 = (3, 0, 1)$$

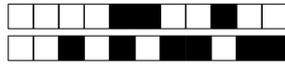
quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors

- (u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 Aucune de ces familles n'est libre.

Question 27 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos(x)\sqrt{1+x^2}?$$

- $1 + o(x^2)$. $x - x^2 + o(x^2)$. $-x + x^2 + o(x^2)$. $1 + x + x^2 + o(x^2)$.
 $-1 - 2x - 3x^2 + o(x^2)$.



Question 28 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1-x)e^x ?$$

- $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$. $-x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)$. $2 - x + x^2 + o(x^2)$.
 $-1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. $x + o(x^2)$.
-

Question 29 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = e^x \sqrt{1+x^2} ?$$

- $1 + x + x^2 + o(x^2)$. $x - x^2 + o(x^2)$. $x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. $2 + x + x^2 + o(x^2)$.
 $1 - x + x^2 + o(x^2)$.
-

Question 30 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1+x) \sin x ?$$

- $1 - x + o(x^2)$. $-x + x^2 + o(x^2)$. $1 - x + x^2 + o(x^2)$. $1 - x + 2x^2 + o(x^2)$.
 $x^2 + o(x^2)$.
-

Question 31 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} ?$$

- $-1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)$. $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$. $2x + x^2 + o(x^2)$. $x - x^2 + o(x^2)$.
 $1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
-

Question 32 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{\cos x} ?$$

- $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. $1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. $2 + x + x^2 + o(x^2)$. $1 + x + x^2 + o(x^2)$.
 $-1 + x + x^2 + o(x^2)$.
-

Question 33 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

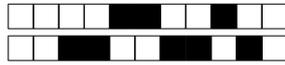
$$f(x) = x^2 \ln(2+x) ?$$

- $\ln(2) + x + x^2 + o(x^2)$. $\ln(2)x + o(x^2)$. $2 - 2x - 3x^2 + o(x^2)$. $\ln(2)x^2 + o(x^2)$.
 $-x + x^2 + o(x^2)$.
-

Question 34 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x} ?$$

- $2 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. $1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. $1 - 2x - 3x^2 + o(x^2)$.
 $x + x^2 + o(x^2)$.
-



Question 35 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x} ?$$

- $x + x^2 + o(x^2)$. $-1 - 2x - 3x^2 + o(x^2)$. $1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. $1 - x + x^2 + o(x^2)$.
 $x - x^2 + o(x^2)$.
-

Question 36 Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 - x^2} ?$$

- $2 - x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2)$. $-x + x^2 + o(x^2)$. $1 - x + x^2 + o(x^2)$.
 $2 - 2x - 3x^2 + o(x^2)$. $1 - x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2)$.
-

Question 37 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 - 2x)}{\sin(x)}$$

- 0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10
-

Question 38 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + 4x)}{\sin(2x)}$$

- 0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10
-

Question 39 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 - 4x)}{\sin(2x)}$$

- 0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10
-

Question 40 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

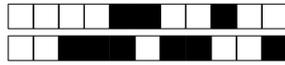
$$f(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{\sin(2x)}$$

- 0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10
-

Question 41 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 - x)}{\sin(x)}$$

- 0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10
-



Question 42 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 - 2x)}{\sin(2x)}$$

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10

Question 43 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin x}$$

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10

Question 44 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{\sin x}$$

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10

Question 45 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + 4x)}{\sin(4x)}$$

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10

Question 46 Quel est le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + 4x)}{\sin x}$$

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10
