Correction Feuille 4 : Développements limités

Exercice 1

Soit f l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $3+\ln(1+x+x^2)$. La positivité de $1+x+x^2$(discriminant négatif strict) pour tout x réel nous garantit la bonne définition sur $\mathbb{R}$ de la *fonction* f. Dorénavant on considérera que les fonctions sont bien définies aux voisinages concernés **mais il ne faut pas oublier de le vérifier ! !** Avant de commencer à calculer le DL, commençons d'abord par vérifier qu'il existe. f est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que composée de fonctions définies et $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 pour $x \mapsto x+x^2$ et $x \mapsto \ln(1+x)$. On sait que :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Posons $X = x + x^2$. D'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3+\ln(1+X) = 3 + X - \frac{X^2}{2} + o(X^2) \\ &= 3+x+x^2 - \frac{x^2+2x^3+x^4}{2} + o(x^2+2x^3+x^4) \\ &= 3+x+\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^2(1+2x+x^2)) \end{aligned}$$

Or on rappelle que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m > n$,on a $x^m = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et $x^n = \underset{x\to\infty}{o}(x^m)$. On a donc :

$$f(x) = 3 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

.

L'énoncé demande un calcul direct, ce qui ici signifie appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 **en justifiant bien que les conditions d'application sont satisfaites**. Ici f est bien $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1-2x-2x^2}{1+x+x^2}$$

.

D'où par application directe de la formule de Taylor-Young en 0 :

$$\begin{aligned} &f(0) = 3 \\ &f'(0) = f''(0) = 1 \\ &f(x) = 3 + x + \frac{x}{2!} + o(x^2) \end{aligned}$$

Posons $g(x) = e^{\cos(x)}$. g est bien $\mathcal{C}^\infty$ en tant composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On rappelle qu'en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

.
Remarquons que $\cos(0) = 1$. Si jamais on composait comme précédemment les DL, il faudrait bien faire attention au fait que le DL de l'exponentielle est au voisinage de 1 ce qui serait un peu plus long qu'appliquer directement la formule de Taylor-Young.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (-\sin(x))e^{\cos(x)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = -e^{\cos(x)}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)$$

. D'où par application directe de la formule de Taylor-Young en 0 :

$$g(0) = 1$$
$$g'(0) = 0$$
$$g''(0) = -1$$
$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x^2)$$

.
Remarquons que comme la fonction cos est paire, la fonction g est paire et il n'y a a pas de termes d'ordre impair.
De même que précédemment,la fonction $h : x \mapsto +\tan(x)$ est bien $\mathcal{C}^\infty$ en tant que somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On applique donc la formule de Taylor-Young à l'ordre en $x = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 1 + \tan^2(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h''(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x))$$

. D'où par application directe de la formule de Taylor-Young en 0 :

$$h(0) = 1$$
$$h'(0) = 1$$
$$h''(0) = 0$$
$$h(x) = 1 - x + o(x^2)$$

.
Remarquons que comme la fonction tan est impaire, la fonction $h - 1$ est impaire et il n'y a a pas de termes d'ordre pair et qu'on aurait pu s'éviter de calculer la dérivée seconde.

Exercice 2

On considère la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 + \arcsin(x)$. Cette fonction est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $x \in]-1, 1[$ en tant que somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.De plus, f est nulle en 0. Pour calculer les trois premiers termes non nuls, on a donc besoin de calculer au moins jusqu'à la dérivée tierce. Soit $x \in]-1, 1[$.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$f''(x) = 2 + \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}}$$
$$f'''(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} + 3\frac{x^2}{(1 - x^2)^{5/2}}$$

donc

$$f'(0) = 1$$
$$f''(0) = 2$$
$$f'''(0) = 1$$

d'où

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

.
À partir de la dérivée tierce, les dérivées successives de f correspondent à celles de la fonction arcsin qui est une fonction impaire. Les termes pairs sont donc tous nuls. Le prochain terme non nul est au moins à l'ordre 5. Un calcul nous permet de trouver que le cinquième terme vaut $\frac{9}{5!} = \frac{3}{40}$.

Exercice 3

(a) On remarque que la fonction $f : x \mapsto e^{2x} + x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Le développement limité à l'ordre 3 existe et on somme les développements limités.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} + x^3 \\ &= 1 + x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) + x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{14}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

(b) On remarque que la fonction $g : x \mapsto e^x \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Le développement limité à l'ordre 3 existe et on multiplie les développements limités.

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x \sin(x) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \times 3!} + xo(x^3) + \frac{x^3}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \end{aligned}$$

On pourrait continuer à développer mais comme rappelé dans l'exercice 1, $x^m = \underset{0}{o}(x^3)$ pour $m > 3$. Afin de limiter les calculs, on ne va compter que les termes dont le produit deux à deux est inférieur à 3. D'où :

$$g(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(c) On remarque que la fonction $h : x \mapsto (x + \sin(x))^{17}x^3 + 1 + 3x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Le développement limité à l'ordre 3 existe et on multiplie les développements limités. Comme on sait que si un terme est de degré strictement supérieur à 3 est un $o(x^3)$ en 0, le seul terme dont on doit tenir compte provenant du terme $(x+\sin(x))^{17}x^3$ est le terme constant du DL en 0 de $x \mapsto x+\sin(x)$. En effet, les autres termes seront au moins de degré 17. Or $x \mapsto x + \sin(x)$ est nulle en 0 et le terme constant du DL est donc nul. Par conséquent, on a :

$$h(x) = 1 + 3x^2 + o(x^3)$$

Exercice 4

(a) On appelle $f : x \mapsto \sin(x)$ qui est bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$,on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \\ f^{(2)}(x) &= -\sin(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) = f(x) \end{aligned}$$

d'où pour $x=0$

$$f(0)=f'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f^{(2)}(0)=f^{(3)}(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

. On remarque qu'en dérivant f quatre fois, on retrouve la fonction f. On a donc :

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

.

(b) On prouve par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathcal{P}(n):\left\{f^{(4n)}=f,f^{(4n+1)}=f',f^{(4n+2)}=f^{(2)},f^{(4n+3)}=f^{(3)}\right\}$$

. On a effectué l'initialisation à la question précédente et on effectue facilement l'hérédité en n'oubliant pas de vérifier $\mathcal{P}(n+1)$: $\left\{f^{(4n+4)}=f,f^{(4n+5)}=f',f^{(4n+6)}=f^{(2)},f^{(4n+7)}=f^{(3)}\right\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}\\&+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^7}{7!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^7\right)\end{aligned}$$

.

(c) On a $22=2 \pmod 4$, le 22-ème terme est donc $-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{22!}$.

Exercice 5

1. f et g sont deux fonctions C^∞ en $a=0$ et donc admettent des DL à tout ordre.

$$f(x)=-x+x^3+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}g(x)&=e^{2x}\\&=_{y=2x}e^y\\&=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+o(y^3)\\&=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f^2(x)&=(-x+x^3+o(x^3))^2\\&=(-x+x^3+o(x^3))(-x+x^3+o(x^3))\\&=x^2-2x^4+x^6+o(x^4+x^6)\\&=x^2-2x^4+x^6+o(x^4)\\&=x^2-2x^4+o(x^4)\\&=x^2+o(x^3)\end{aligned}$$

Les lignes 4 et 5 (voire 3) ne sont absolument pas nécessaires et y figurent juste pour être plus claires.

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=(-x+x^3+o(x^3))(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3))\\&=-x-2x^2-2x^3+x^3+o(x^3)\\&=-x-2x^2-x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(x)g(x) &= \left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)\left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)\\
&= 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}+x^3+o(x^3)+2x+4x^2+4x^3+2x^2+4x^3\\
&= 1+4x+8x^2+\frac{28}{3}x^3+o(x^3)
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
g\circ f(x) = &\underbrace{e^{-x+x^3+o(x^3)}}_{y:=-x+x^3+o(x^3)}\\
&= e^y\\
&= 1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+o(y^3)\\
&= 1+(-x+x^3+o(x^3))+\frac{(-x+x^3+o(x^3))^2}{2!}+\frac{(-x+x^3+o(x^3))^3}{3!}+o((-x+x^3+o(x^3))^3)\\
&= 1+(-x+x^3+o(x^3))+\frac{x^2+o(x^3)}{2!}\dots\ \text{(d'après Q2)}\\
&+\frac{(-x+x^2+o(x^3))(x^2+o(x^3)}{3!}+o(x^3)\\
&= 1+(-x+x^3+o(x^3))+\frac{x^2+o(x^3)}{2}+\frac{-x^3+o(x^3)}{6}+o(x^3)\\
&= 1+-x+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+o(x^3))
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
f\circ g(x) &= \left(e^{2x}\right)^4+\left(e^{2x}\right)^3-e^{2x}\\
&= e^{8x}+e^{6x}-e^{2x}\\
&= 1+8x+\frac{(8x)^2}{2}+\frac{(8x)^3}{6}+o(x^3)+1+6x+\frac{(6x)^2}{2}+\frac{(6x)^3}{6}+o(x^3)\\
&\dots-(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3))\\
&= 1+12x+48x^2+120x^3+o(x^3)
\end{aligned}
$$

Exercice 6

On rappelle :

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

1.

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x)\sin(x) &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\
&= x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)-\frac{x^3}{2}\\
&= x^2+o(x^3)-\frac{x^3}{2}\\
&= x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4),
\end{aligned}
$$

2.

$$\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

3.

$$\sin(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

4.

$$\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)} = x - x^2 + \frac{4x^4}{3} - \frac{13x^4}{6} + o(x^4).$$

Exercice 7

La fonction est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 puisque le dénominateur ne s'annule jamais au voisinage de l'origine et que les dérivées successives feront apparaître le même dénominateur à des puissances de 2 supérieures. On a :

$$\frac{\exp(x)}{\cos(x)} = 1 + x^+ x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 8

1. $(1+x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + o(x^3)$
2. $\dfrac{\exp(x)}{(1+x)^3} = 1 - 2x + \dfrac{7}{2}x^2 - \dfrac{16}{3}x^3 + o(x^3)$
3. $\sqrt{-x^2+3x+1} = 1 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{13}{8}x^2 + \dfrac{39}{16}x^3 + o(x^3)$,
4. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x} = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 9

1. $(1-x)^{-1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{5}{16}x^3 + o(x^3)$,
2. On pose $X = x^2$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, on peut utiliser le point précédent et remplacer x par x^2 dans le développement :

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^3),$$

3. On remarque que le développement limité du point précédent n'est rien d'autre que le développement limité de la dérivée de arcsin, il suffit d'intégrer :

$$\arcsin(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7).$$

Exercice 10

1. On pose $X = x^2$ comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ on remplace directement dans le DL en 0 de $\sin(X)$:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{13}),$$

2. On pose $X = x^4$, on écrit le DL en 0 de $\dfrac{1}{1+X}$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ on remplace directement X par x^4 dans le développement, puis on multiplie par $2x$:

$$\frac{2x}{1+x^4} = 2x - 2x^5 + 2x^9 + o(x^{12}),$$

3. On remarque que $\arctan(x^2)' = 2x/(1+x^4)$ et on intègre le développement trouvé au point précédent :

$$\arctan(x^2) = x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + o(x^{13}).$$

Exercice 12

1. On utilise la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\exp(x)-\cos(x)-x)'}{(\ln(1+\sin(x))-x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\exp(x)+\sin(x)-1)}{\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}-1\right)}
\end{aligned}$$

cela ne suffit pas à lever l'indétermination, on applique l'Hospital une deuxième fois :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(\exp(x)+\sin(x)-1)}{\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}-1\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\exp(x)+\sin(x)-1)'}{\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}-1\right)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)+\cos(x)}{\left(-\frac{1}{\sin(x)+1}\right)} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x} = -2$, en particulier la limite existe.

2. On montre que f admet un DL à l'ordre 1 par calcul direct (on calcule le DL du numérateur et du dénominateur à l'ordre 3) :

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(x)-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x} &= \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-x}{\ln\left(1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\right)-x} \\
&= \frac{x^2+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x} \\
&= \frac{x^2\left(1+\frac{x}{6}+o(x)\right)}{x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+o(x)\right)} \\
&= \frac{1+\frac{x}{6}+o(x)}{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{3}+o(x)\right)} \\
&= -2-x+o(x).
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, f admet un DL à l'ordre 1. Or admettre un DL à l'ordre 1 est équivalent à la dérivabilité de f. (C'est dans le cours, mais nous le remontrons) :

$$f(x) = -2-x+o(x) \iff \frac{f(x)+2+x}{x} = o(1) \iff \frac{f(x)-f(0)}{x} + 1 = o(1)$$

Donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -1$, càd $f'(0) = -1$.

Attention : Un DL à l'ordre 1 est équivalent à la dérivabilité. Mais des DL d'ordre strictement supérieur à 1 n'est pas équivalent à une dérivabilité d'ordre supérieur. Par exemple : il existe des fonctions admettant des DL d'ordre 2, qui ne sont pas deux fois dérivables. (Voir le cours).

Exercice 13

(a) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1+x} &= x(1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)) \\
&= x-x^2+x^3-x^4+o(x^4) \\
\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= x-x^2+x^3-x^4+o(x^4) - \frac{(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^3}{6} + o(x^4) \\
&= x-x^2+x^3(1-\frac{1}{6}) + x^4(-1+\frac{3}{6}) + o(x^4) \\
&= x-x^2+\frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\
\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} &= \sin(x) - \sin(x)^2 + \sin(x)^3 - \sin(x)^4 + o(\sin(x)^4) \\
&= x - \frac{x^3}{6} - \left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3 - \left(x-\frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) \\
&= x-x^2+\frac{5}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in]1,1[- \{0\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^4(x)}\left(\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right) &= \frac{1}{\sin^4(x)}\left(x-x^2+\frac{5}{6}x^3-\frac{1}{2}x^4 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{x^4+o(x^4)}\left(\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\right)
\end{aligned}$$

.

On peut en conclure que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4(x)}\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right] = \frac{1}{6}.$$

Remarque : Si on veut utiliser la règle de l'hôpital, en écrivant la fonction sous la forme $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{1+x}\right) - \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$ et $g(x) = \sin^4(x)$, alors on a bien $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ mais cependant $g'(x) = 4\cos(x)\sin^3(x)$ donc $g'(0) = 0$, donc les hypothèses de la règle de l'hôpital ne sont pas satisfaites.

Exercice 14

Soit $f(x) = \dfrac{cos(x)}{sin(x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$. On met sur le même dénominateur $f(x) = \dfrac{x^2cos(x) - sin(x)^2}{sin(x)^2x^2}$. On calcule le DL du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{x^2(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2}{x^2(x+o(x^2))^2}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - (x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4))}{x^4 + o(x^5)}$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^5)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(x)} \to_{x \to 0} -\frac{1}{6}$$

On considère la fonction $f(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$, et on veut montrer que cette fonction admet une limite en 0. Considérons déjà la fonction $g(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ et regardons son comportement en 0 : en termes de limites c'est une forme indéterminée donc on ne peut pas conclure directement. Il faut calculer un DL de cette fonction à un ordre ≥ 1 (comme dans l'Exercice 12).

Calculons pour ceci des DL du numérateur et du dénominateur à l'ordre 4 :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + o(x^4) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

Maintenant, il faut faire une division euclidienne de ces deux développements limités :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{24}x^4 & x^2 & -\frac{1}{3}x^4 & \\ \cline{4-6}
-(1 & -\frac{1}{3}x^2) & & \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{6} & +\dots \\ \cline{1-2}
 & -\frac{1}{6}x^2 & +\frac{1}{24}x^4 & & & \\
 & -(\frac{1}{6}x^2 & +\frac{1}{18}x^4) & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{1}{72}x^4 & & &
\end{array}$$

Donc le DL de $f(x)$ (si on soustrait $\dfrac{1}{x^2}$) commence par $-\dfrac{1}{6} + ...$, et cela suffit à calculer la limite, qui est $-\dfrac{1}{6}$. Plusieurs remarques :

— On était bien obligés d'aller à l'ordre 4 dans le numérateur et le dénominateur car, lorsque l'on fait la deuxième étape de la division euclidienne, on multiplie le terme $-\dfrac{1}{3}x^4$ par $\dfrac{1}{x^2}$, ce qui nous donne un nouveau terme en x^2 que l'on aurait pas vu si on s'était arrêté à l'ordre 3, et donc la division euclidienne aurait été fausse (on aurait eu $-\dfrac{1}{2}x^2$ dans la troisième étape de la DL au lieu de $-\dfrac{1}{6}x^2$ et on n'aurait ainsi pas obtenu la bonne limite).

— On a pas besoin d'aller voir les crans plus loin ici car ils tendront vers 0, seulement on serait tentés de continuer et de dire que le terme suivant dans le DL serait $-\dfrac{1}{72}x^4$ mais de même, cela n'est pas exact car en faisant cette division euclidienne, il nous manque des termes à l'ordre 4 qu'on ne peut voir qu'en faisant le DL de $\sin^2(x)$ jusqu'à l'ordre 6, quand on multiplie le terme devant le x^6 par le $\dfrac{1}{x^2}$. Donc on ne peut pas continuer à calculer le DL ici, mais on a obtenu la limite qu'on voulait.

Exercice 15

Méthode 1 avec les DLs

On considère la fonction $f(x) := \dfrac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}$ et on veut voir si elle admet une limite en 0. Si on calcule les limites du numérateur et du dénominateur, cela donne une forme indéterminée. Comme pour l'Exercice 13, la règle de l'hôpital ne s'appliquera pas car $(x\tan(x))'(0) = 0$, il faut donc passer par des développements limités. On a :

$$\sin(3x) \underset{0}{=} 3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^4) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4).$$

$$\tan(2x) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^4) \Rightarrow x\tan(2x) = 2x^2 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4).$$

On fait donc la division euclidienne des deux DL :

$$\begin{array}{lll|l}
3x & -\frac{9}{2}x^3 & & 2x^2 \quad +\frac{8}{3}x^4 \\ \cline{4-4}
-(3x & +4x^3) & & \frac{3}{2}\times\frac{1}{x} \quad -\frac{17}{4}x \quad +\dots \\ \cline{1-2}
 & -\frac{17}{2}x^3 & & \\
 & -(\frac{17}{2}x^3 & -\frac{34}{3}x^6) & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{34}{3}x^6 &
\end{array}$$

D'où $f(x) \underset{0}{=} \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{17}{4}x + o(x)$. Ainsi, la limite en 0 de f est la limite en 0 de $\frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$, c'est à dire $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ($x \downarrow 0$), et $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures ($x \uparrow 0$)

Méthode 2 avec les équivalents On étudie ici le comportement au voisinage de 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}$. D'après le cours et par composition **à droite** des équivalents et par produit, on a :

$$\sin(3x) \underset{0}{\sim} 3x$$
$$\tan(2x) \underset{0}{\sim} 2x$$
$$x\tan(2x) \underset{0}{\sim} 2x^2$$

d'où avec la non-annulation à part en 0 sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ du dénominateur

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{3}{x}$$

. On obtient bien le résultat demandé.