Fondamentaux des mathématiques II

Chapitre 1
Matrices

Les matrices sont des tableaux rectangulaires de réels ou de complexes. Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. toutes les matrices sont à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition :
Une matrice (m, n) est un tableau rectangulaire avec m lignes et n colonnes.
Convention de notation :
Les matrices sont notées avec une majuscule, par exemple A, le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est notée alors $a_{i,j}$. On pose alors $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$

Notation :
L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est notée $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, lorsque $m = n$ on note cet ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Définition :
La somme de deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, A et B est la matrice C définie pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ par $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, le produit d'un scalaire λ par une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice D définie pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ par $d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Exemple :
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$2A - 4B = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -16 & 10 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -20 & 32 \\ -8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -10 & -24 & 38 \\ -24 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

Définition :
Le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$ par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque :
Cette multiplication n'est pas commutative, c'est-à-dire qu'en général $AB \neq BA$. Si $m \neq p$ le produit AB est une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ alors que le produit BA n'existe pas, et si $m = p$, AB est une matrice de $\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ et BA est une matrice $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Proposition :
Pour tous entiers n, p et q et $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $(AB)C = A(BC)$

Démonstration
Notons $D = AB$, $E = BC$, $F = (AB)C$ et $G = A(BC)$

Alors pour tous i et l, avec $1 \leq i \leq m$, $1 \leq l \leq q$, on a :

$$f_{i,l} = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k} c_{k,l} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \right) c_{k,l} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,l} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{j,k} c_{k,l} \right) = g_{i,l}$$

Donc $F = G$.

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Alors $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + (-2) \times 2 + 3 \times (-3) \\ (-4) \times 0 + 5 \times 2 + (-6) \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 28 \end{pmatrix}$

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) & 1 \times 2 + 2 \times 3 & 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 3 + 2 \times (-2) \\ (-1) \times 1 + 3 \times (-1) & (-1) \times 2 + 3 \times 3 & (-1) \times 0 + 3 \times 1 & (-1) \times 3 + 3 \times (-2) \\ 2 \times 1 + 0 \times (-1) & 2 \times 2 + 0 \times 3 & 2 \times 0 + 0 \times 1 & 2 \times 3 + 0 \times (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 & -1 \\ -4 & 7 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Définition :

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice I_n définie pour tout (i, j) avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$AI_n = I_n A = A$$

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on appelle sous-matrice de A toute matrice obtenue en éliminant certaines (ou aucune) lignes de A et certaines (ou aucune) colonnes de A.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la transposée de A est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, B définie par $b_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Notation :

La transposée de A est notée ${}^tA$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m-1} & a_{n,m} \end{pmatrix}$ alors

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n-1,1} & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n-1,2} & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m-1} & a_{2,m-1} & \cdots & a_{n-1,m-1} & a_{n,m-1} \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n-1,m} & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Proposition :
Pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Démonstration
Notons $C = AB$, $D = {}^t(AB)$, $E = {}^tA$, $F = {}^tB$ et $G = {}^tB\,{}^tA$ alors par définition de la transposition et du produit, pour tout k, avec $1 \leq k \leq p$ et pour tout i avec $1 \leq i \leq m$,

$$d_{k,i} = c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} e_{j,i} f_{k,j} = g_{k,i}$$

Donc $D = G$.

Définition :
Une matrice est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.

Remarque :
Les matrices symétriques sont des matrices carrées.
Les matrices symétriques sont symétriques par rapport à la diagonale « en haut à gauche » « en bas à droite ».

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice carrée est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$AB = I_n = BA$$

Proposition :
Les seules matrices inversibles sont les matrices carrées
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ alors $BA = I_n$, donc A est inversible.

Démonstration admise

Proposition :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice carrée inversible admet un unique inverse

Démonstration

Supposons que A admet deux inverses B et C.

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Notation :

L'inverse d'une matrice inversible A est notée A^{-1}.

Proposition :

Soient $P_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles, alors $(P_1P_2)^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$

Démonstration

$$(P_2^{-1}P_1^{-1})(P_1P_2) = P_2^{-1}(P_1^{-1}P_1)P_2 = P_2^{-1}I_nP_2 = P_2^{-1}P_2 = I_n$$

Détermination pratique du calcul de l'inverse d'une matrice :

Si $Y = AX$ alors $A^{-1}Y = A^{-1}AX = X$

Si on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = AX$ est un système où les y_i s'exprime en fonction des x_i, alors que $X = A^{-1}Y$ est un système où les x_i s'exprime en fonction des y_i, il suffit donc d'inverser le système.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ y_3 = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = y_2 \\ -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \\ L_3 + 3L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = 2y_2 - y_1 \\ 4x_2 - 5x_3 = y_3 + 3y_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 4L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = 2y_2 - y_1 \\ -x_3 = y_3 + 3y_2 - 4(2y_2 - y_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 = y_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_2 = 2y_2 - y_1 + x_3 \\ -x_3 = 4y_1 - 5y_2 + y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 = y_1 - 3x_2 - 4y_1 + 5y_2 - y_3 \\ x_2 = 2y_2 - y_1 - 4y_1 + 5y_2 - y_3 \\ x_3 = -4y_1 + 5y_2 - y_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 = y_1 - 3x_2 - 4y_1 + 5y_2 - y_3 \\ x_2 = -5y_1 + 7y_2 - y_3 \\ x_3 = -4y_1 + 5y_2 - y_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 = -3y_1 + 5y_2 - y_3 - 3(-5y_1 + 7y_2 - y_3) \\ x_2 = -5y_1 + 7y_2 - y_3 \\ x_3 = -4y_1 + 5y_2 - y_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 = 12y_1 - 16y_2 + 2y_3 \\ x_2 = -5y_1 + 7y_2 - y_3 \\ x_3 = -4y_1 + 5y_2 - y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 = 6y_1 - 8y_2 + y_3 \\ x_2 = -5y_1 + 7y_2 - y_3 \\ x_3 = -4y_1 + 5y_2 - y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -8 & 1 \\ -5 & 7 & -1 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 1 \\ -5 & 7 & -1 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Définition :
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes lorsqu'il existe deux matrices inversibles $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$

Remarque :
On aurait pu remplacer Q^{-1} par Q puisque Q est inversible, mais cette notation permet de conserver une certaine homogénéité avec la formule suivante.
Cette relation entre A et B est une relation d'équivalence, cela se vérifie facilement.

Définition :
Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\quad A' = P^{-1}AP$