Chapitre V Fonctions arcsin, arccos, arctan

1 Définitions

1.1 arcsin

Proposition 1.1 *La fonction* $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *est une bijection.*

On note $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ la fonction réciproque *i.e.* si $-1 \leq x \leq 1$, alors $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$ ET $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Par exemple, $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) \neq 2\pi/3$ mais $= \pi/3$.

Démonstration de la proposition : $\forall -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $\sin' x = \cos x \geq 0$, > 0 si $-\pi/2 < x < \pi/2$. Donc sin est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. En particulier, la fonction $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ est injective. Surjectivité : comme $\sin(-\pi/2) = -1$ et comme $\sin \pi/2 = 1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $-1 \leq y \leq 1$, il existe $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ tel que $\sin x = y$. *q.e.d.*

1.2 arccos

Proposition 1.2 *La fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *est une bijection.*

On note $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ la fonction réciproque *i.e.* si $-1 \leq x \leq 1$, alors $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ ET $0 \leq x \leq \pi$.

1.3 arctan

Proposition 1.3 *La fonction* $\tan : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ *est une bijection.*

On note $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ la fonction réciproque *i.e.* si $x \in \mathbb{R}$, alors $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ ET $-\pi/2 < x < \pi/2$.

2 Propriétés

Proposition 2.1 *a) Les fonctions* arctan *et* arcsin *sont impaires mais* arccos *n'est pas paire ;*

b) *les fonctions* arctan *et* arcsin *sont strictement croissantes et la fonction* arccos *strictement décroissante.*

c) *les fonctions* arcsin *et* arccos *sont continues sur* $[-1, 1]$*, la fonction* arctan *est continue sur* $\mathbb{R}$*.*

d) arcsin *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\forall -1 < x < 1$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\forall -1 < x < 1$, $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ *;*

e) $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1/2) = \pi/6$, $\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$, $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$, $\arcsin(1) = \pi/2$ *;* $\arccos(0) = \pi/2$, $\arccos(1/2) = \pi/3$, $\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$, $\arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$, $\arccos(1) = 0$, $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \pi/4$, $\arctan(1) = \pi/4$, $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \pi/2$ *;*

3 Quelques formules concernant arctan

Proposition 3.1 *a)* $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$ *;*

b) $\arctan(1/2) + \arctan 1/5 + \arctan 1/8 = \pi/4$ *;*

c) $4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239) = \pi/4$ *;*

d) $2 \arctan(1/3) + \arctan(1/7) = \pi/4$ *;*

e) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4$*.*

Démonstration : a,b,c,d) : on utilise que $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ et donc que : $\tan(x + y + z) = \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan y - \tan y \tan z - \tan x \tan z}$. Par exemple pour a) : $\tan(\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3) = \frac{1+2+3-1.2.3}{1-1.2-2.3-1.3} = 0$. Donc $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Or, la fonction arctan est strictement croissante majorée par $\pi/2$ donc : $0 < \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 < 3\pi/2$ d'où $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$.

Pour e) : par une simple étude de fonctions sur $[0, +\infty[$, on montre que :

$$\forall x \geq 0, \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \leq \arctan x \leq \sum_{k=0}^{2p} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. En particulier, si $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, la suite u_{2n} est décroissante minorée par $\arctan 1 = pi/4$, la suite u_{2n+1} est croissante majorée par $\pi/4$. La différence $u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{1}{4n+1}$ tend vers 0. Donc les deux suites ont la même limite qui est forcément $\pi/4$ car pour tout n :

$$u_{2n+1} \leq \arctan 1 = \pi/4 \leq u_{2n} \ .$$

q.e.d.

Chapitre VI Intégration

1 Intégrales des fonctions en escaliers

Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Définition 1 *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ une subdivision de l'intervalle telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, f est constante (égale à une certaine constante $c_i \in \mathbb{R}$) sur l'intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$. Dans ce cas, on dit que la subdivision Δ est adaptée à f.*

Exemple :soit $I \subseteq [a,b]$ un intervalle. On pose $\chi_I : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I, \\ 0 \text{ si } x \notin I. \end{cases}$$

La fonction χ_I est en escaliers.

Exercice 1 *L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ l'espace des fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}$. Les fonctions χ_I, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, forment une famille génératrice de l'espace $\mathscr{E}([a,b]$.*

Remarques :

a) on a $f([a,b]) = \{c_i \,:\, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(t_i) \,:\, 0 \leq i \leq n\}$; en particulier f ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est bornée ;

b) si $\Delta \subseteq \Delta'$ sont des subdivisions de $[a,b]$ (on dit que Δ' est une subdivision plus fine que Δ), alors si Δ est adaptée à f, fonction en escaliers, Δ' aussi.

Définition 2 *Soit f une fonction en escaliers sur $[a,b]$. Le nombre :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) c_i$$

où $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f et $f\Big|_{]t_i, t_{i+1}[} = c_i$, est indépendant de la subdivision adaptée à f choisie. On le note :

$$\int_a^b f \ .$$

Démonstration de l'indépendance vis à vis de la subdivision :

Si Δ est une subdivision adaptée à f, notons $I_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)c_i$ la somme correspondante. Si Δ et Δ' sont des subdivisions adaptées, $\Delta'' = \Delta \cup \Delta'$ est une subdivision adaptée à f et plus fine que Δ et Δ'. Il suffit donc de montrer que $I_\Delta = I_{\Delta''} = I_{\Delta'}$. Posons $\Delta'' = \{x_0, ..., x_m\}$ pour certains $a = x_0 < ... < x_m = b$ dans $[a, b]$. Alors $\Delta = \{x_{i_0}, ..., x_{i_n}\}$ pour certains indices $0 = i_0 < ... < i_n = m$. On a alors en notant c_j la valeur constante de f sur $]x_{i_j}, x_{i_{j+1}}[$:

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \sum_j (x_{i_{j+1}} - x_{i_j})c_j \\ &= \sum_j \sum_{i=i_j}^{i_{j+1}-1} (x_{i+1} - x_i)c_j \\ &= \sum_i (x_{i+1} - x_i)c''_i = I_{\Delta''} \end{aligned}$$

(où c''_i est la valeur constante de f sur $]x_i, x_{i+1}[$). De même, $I_{\Delta'} = I_{\Delta''}$. *q.e.d.*

Exercice 2 *Soit I un intervalle contenue dans $[a, b]$. On a $\int_a^b \chi_I = l(I)$ la longueur de l'intervalle I.*