COURS DU MARDI 7/3/17

2 Fonctions Riemann-intégrables

Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.
Soit $\Delta = \{t_0 < ... < t_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On pose :

$$S_\Delta(f) := \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f$$

somme de Darboux inférieure

$$S^\Delta(f) := \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) \sup_{[t_i,t_{i+1}]} f$$

somme de Darboux supérieure

$$I_*(f)_{[a,b]} := \sup_\Delta S_\Delta(f)$$

intégrale de Riemann inférieure

$$I^*(f)_{[a,b]} := \inf_\Delta S^\Delta(f)$$

intégralede Riemann supérieure où à chaque fois, Δ décrit toutes les subdivisions de $[a,b]$.

Remarques : Pour toute subdivision Δ de $[a,b]$, on a bien entendu :

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq S_\Delta(f) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^\Delta(f) \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f \ .$$

De plus si $\Delta \subseteq \Delta'$ est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que Δ, alors :

$$S_\Delta(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^{\Delta'}(f) \leq S^\Delta(f) \ .$$

Définition 1 *On dit qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si $I_*(f) = I^*(f)$. Si f est une fonction Riemann-intégrable, alors on pose $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f = I_*(f) = I^*(f)$.*

Exemples :

1. les fonctions en escaliers! *Démonstration :* En effet si $f = \chi_I$ où $I =]c,d[$ avec $a \leq c \leq d \leq b$, alors si Δ_n est la subdivision $\{a + i\frac{b-a}{n} : 0 \leq i \leq n-1\}$ on a :

$$S_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \inf_{[x_i,x_{i+1}]} \chi_I$$

où pour tout i, $x_i = a+i\frac{b-a}{n}$ et $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} \chi_I = \begin{cases} 1 \text{ si } I \subseteq [x_i, x_{i+1}] \Leftrightarrow c < x_i < x_{i+1} < d \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Posons k le plus petit entier tel que $c < x_k$ et l le plus grand entier tel que $x_l < d$. On a :

$$.... < x_{k-1} \leq c < x_k < ... < x_l < d \leq x_{l+1} < ...$$

et $S_{\Delta_n}(\chi_I) = \sum_{i=k}^{l-1}(x_{i+1} - x_i) = x_l - x_k$. Or :

$$x_l - x_k = x_{l+1} - x_{k-1} - (x_{l+1} - x_l) - (x_k - x_{k-1}) > d - c - 2\frac{b-a}{n}$$

d'où $S_{\Delta_n}(\chi_I) > l(I) - 2\frac{b-a}{n}$ pour tout n (assez grand). Donc $I_*(\chi_I) \geq l(I)$. On montre de même que $I^*(\chi_I) \leq l(I)$ donc $I_*(\chi_I) = I^*(\chi_I)$, χ_I est Ri et $\int_a^b \chi_I = l(I)$.

Si f est en escaliers, f est une combinaison linéaire de χ_I et en utilisant la linéarité de l'intégrale (*cf.* plus loin ...), on en déduit que f est Ri et que $\int_a^b f$ est l'intégrale telle que définie pour les fonctions en escaliers.

q.e.d.

2. les fonctions monotones ! *Démonstration :* par exemple si f est croissante : alors f est bornée (entre $f(a)$ et $f(b)$) et si $\Delta = \{t_0, ..., t_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$, on a :

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S^\Delta(f) - S_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)(f(t_{k+1} - f(t_k)) \leq \max_i\{t_{i+1} - t_i\} \sum_k f($$

$$\leq \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n}$$

si on prend $t_i = a + i(b-a)/n$. Si on fait tendre n vers 0, on trouve $I_*(f) = I^*(f)$. *q.e.d.*

3. les fonctions continues ! *patience*

Contre-exemple : la fonction $\chi_\mathbb{Q} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon.

Exercice 1 *La fonction* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto hx$ *est Riemann-intégrable sur* $[0, 1]$ *et* $\int_0^1 f = h/2$.

Si $f \geq 0$ est Riemann-intégrable, on peut interpréter $\int_a^b f$ comme l'aire de la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Exercice 2 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Alors* f *est RI* $\Leftrightarrow \,^\forall \epsilon > 0, \,^\exists e, E$ *deux fonctions en escaliers sur* $[a,b]$, $e \leq fleE$ *et* $\int_a^b (E-e) \leq \epsilon$.

Exercice 3 *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$.*Pour toute subdivision* $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ *de* $[a,b]$, *on note* $h_\Delta = \max_i\{t_{i+1} - t_i\}$ *(le pas de la subdivision). Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est bornée, alors* f *est Ri* $\Leftrightarrow \lim_{h_\Delta \to 0} S^\Delta(f) - S_\Delta(f) = 0$.

3 Relation de Chasles

Si $a > b$, si f est intégrable sur $[b,a]$, on pose $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Théorème 3.1 *Soient* $a \leq c \leq b \in R$. *Alors* f *est Riemann-intégrable sur* $[a,b] \Leftrightarrow f$ *est Riemann-intégrable sur* $[a,c]$ *et* $[c,b]$. *Dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Démonstration : $\Rightarrow$: Supposons f Ri sur $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ qui sont contenus dans $[a,b]$. Soit Δ une subdivision de $[a,b]$. Soit $\Delta_1 = \Delta \cap [a,c] \cup \{c\}$ et soit $\Delta_2 = \Delta \cap [c,b] \cup \{c\}$. Ce sont des subdivisions de $[a,c]$ et $[c,b]$. Posons $\Delta' = \Delta \cup \{c\}$. On a :

$$S_\Delta(f) \leq S_{\Delta'}(f) = S_{\Delta_1}(f) + S_{\Delta_2}(f) \leq S^{\Delta_1}(f) + S^{\Delta_2}(f) = S^{\Delta'}(f) \leq S^\Delta(f)$$

donc :

$$S_\Delta(f) \leq I_*(f)_{[a,c]} + I_*(f)_{[c,b]} \leq I^*(f)_{[a,c]} + I^*(f)_{[c,b]} \leq S^\Delta(f) \ .$$

Comme cela est vrai pour toute subdivision Δ de $[a,b]$, on obtient :

$$I_*(f)_{[a,b]} = \int_a^b f \leq I_*(f)_{[a,c]} + I_*(f)_{[c,b]} \leq I^*(f)_{[a,c]} + I^*(f)_{[c,b]} \leq I^*(f)_{[a,b]} = \int_a^b f$$

$$\Rightarrow I_*(f)_{[a,c]} + I_*(f)_{[c,b]} = I^*(f)_{[a,c]} + I^*(f)_{[c,b]} = \int_a^b f$$
$$\Rightarrow I^*(f)_{[a,c]} - I_*(f)_{[a,c]} + I^*(f)_{[c,b]} - I_*(f)_{[c,b]} = 0$$
$$\Rightarrow I^*(f)_{[a,c]} - I_*(f)_{[a,c]} = 0 \text{ et } I^*(f)_{[c,b]} - I_*(f)_{[c,b]} = 0$$

car les deux termes sont ≥ 0.

Donc f est Ri sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et $\int_a^c f + \int_c^b f = I_*(f)_{[a,c]} + I_*(f)_{[c,b]} = \int_a^b f$.

$\Leftarrow$: Supposons f Ri sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Comme $[a,c]\cup[c,b]=[a,b]$, f est bornée sur $[a,b]$. Soit Δ_1 une subdivision de $[a,c]$ et δ_2 une de $[c,b]$. Alors $\delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ est une subdivision de $[a,b]$ et on a :

$$S_\Delta(f)=S_{\Delta_1}(f)+S_{\Delta_2}(f)\leq S^\Delta(f)=S^{\Delta_1}(f)+S^{\Delta_2}(f)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta_1}(f)+S_{\Delta_2}(f)\leq I_*(f)_{[a,b]}\leq I^*(f)_{[a,b]}\leq S^{\Delta_1}(f)+S^{\Delta_2}(f)$$

comme c'est vrai pour toutes les subdivisions Δ_1 de $[a,c]$ et toutes les subdivisions Δ_2 de $[c,b]$, on obtient :

$$I_*(f)_{[a,c]}+I_*(f)_{[c,b]}\leq I_*(f)_{[a,b]}\leq I^*(f)_{[a,b]}\leq I^*(f)_{[a,c]}+I^*(f)_{[c,b]}$$

$$\Rightarrow \int_a^c f+\int_c^b f=I_*(f)_{[a,b]}=I^*(f)_{[a,b]}$$

donc f est Ri sur $[a,b]$ et $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$. *q.e.d.*

4 Linéarité de l'intégrale

Proposition 4.1 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Si $\lambda\in\mathbb{R}$, alors λf aussi et*

$$\int_a^b(\lambda f)=\lambda\int_a^b f\ .$$

Démonstration : Si $\lambda>0$, alors $S_\Delta(\lambda f)=\lambda S_\Delta(f)$ et $S^\Delta(\lambda f)=\lambda S^\Delta(f)$ pour toute subdivision de Δ de $[a,b]$. Si $\lambda<0$, alors $S_\Delta(\lambda f)=\lambda S^\Delta(f)$ et $S_\Delta(\lambda f)=\lambda S_\Delta(f)$ pour toute subdivision de Δ de $[a,b]$. On en déduit facilement que $I_*(\lambda f)=\lambda\int_a^b(f)=I^*(\lambda f)$ ...

q.e.d.

Proposition 4.2 *Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables. Alors $f+g$ aussi et on a :*

$$\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g\ .$$

Démonstration : Il est clair que $f+g$ est borné. Soit $\epsilon>0$, il existe une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que $I_*(f)-\epsilon\leq S_\Delta(f)$ et $S^\Delta(f)\leq\epsilon+I^*(f)$. Et la même chose pour g. Mais alors, on a :

$$S_\Delta(f)+S_\Delta(g)\leq S_\Delta(f+g)\leq S^\Delta(f+g)\leq S^\Delta(f)+S^\Delta(g)$$

$$\Rightarrow I_*(f) - \epsilon + I_*(g) - \epsilon \leq S_\Delta(f+g) \leq S^\Delta(f+g) \leq I^*(f) + \epsilon + I^*(g) + \epsilon$$
$$\Rightarrow 0 \leq I^*(f+g) - I_*(f+g) \leq S^\Delta(f+g) - S_\Delta(f+g) \leq 4\epsilon$$
pour tout $\epsilon > 0$ ... <u>*q.e.d.*</u>

On en déduit :

Théorème 4.3 *L'ensemble des fonctions RI sur $[a,b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel de l'espace des fonctions bornées $[a,b] \to \mathbb{R}$ et l'application :*
$$f \mapsto \int_a^b f$$
est linéaire.

5 Positivité

Théorème 5.1 *a) Si $f \geq 0$ est RI, alors $\int_a^b f \geq 0$;*
b) Si $f \geq g$ sont RI, alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Démonstration : a) est évident d'après la définition de l'intégrale et on a $f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$. <u>*q.e.d.*</u>

5.1 Inégalités strictes

Proposition 5.2 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est ≥ 0, si $a < b$ et si f est continue, alors si f est non nulle $\int_a^b f > 0$.*

Démonstration : Admettons que f est Ri (nous le démontrerons bientôt).
Il existe $a < x_0 < b$ tel que $f(x_0) > 0$. Si on pose $\epsilon = f(x_0)/2$, comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que
$$[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subseteq [a,b], \text{ et } |y - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x_0| < \epsilon \ .$$

En particulier, $|y - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(y) > f(x_0) - \epsilon = f(x_0)/2 > 0$. Si on prend la subdivision $\Delta = \{a, x_0 - \eta, x_0 + \eta, b\}$, on a :
$$\int_a^b f = I_*(f) \geq S_\Delta(f) = (x_0 - \eta - a) \inf_{[a, x_0 - \eta]} f + 2\eta \inf_{[x_0 - \eta, x_0 + \eta]} f + (b - x_0 - \eta) \inf_{[x_0 + \eta, b]} f \geq 2\eta f(x_0)/2 = f(x_0)$$
<u>*q.e.d.*</u>

Exercice 4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier ≥ 0. Montrer que $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$ sauf au plus en un nombre fini de points.*