5.2 Intégrale de la valeur absolue

Théorème 5.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Ri. Alors $|f|$ est aussi Ri et*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \ .$$

Contre-exemple : soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 \text{ sinon.} \end{cases}$; alors $|f|$ est Ri (c'est la fonction constante 1) mais montrer que f ne l'est pas.

Démonstration du théorème : Soit $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Soient $t_i \leq x, y \leq t_{i+1}$. On a :

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i$$

où $m_i = \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f \leq f(x), f(y) \leq M_i = \sup_{[t_i,t_{i+1}]} f$.

Donc $\sup_{[t_i,t_{i+1}]} |f| \leq M_i - m_i + |f(y)|$ pour tous $y \in [t_i, t_{i+1}]$. Donc :

$$\sup_{[t_i,t_{i+1}]} |f| - M_i + m_i \leq \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f \ .$$

En sommant sur i, on obtient :

$$S^\Delta(|f|) + S_\Delta(f) \leq S_\Delta(|f|) + S^\Delta(f)$$

$$\Rightarrow I^*(f) - I_*(f) \leq S^\Delta(f) - S_\delta(f) \ .$$

Cela étant vrai pour toute subdivision Δ on en déduit :

$$^\forall\epsilon > 0,\ I^*(|f|) - I_*(|f|) \leq \epsilon$$

puis $I^*(|f|) - I_*(f) \leq 0 \Rightarrow I^*(|f|) = I_*(|f|)$. Donc $|f|$ est Ri. Comme $f \leq |f|$, on a $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. De même, on a $-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Donc $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

q.e.d.

6 Intégrale des fonctions continues, primitives

Théorème 6.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est Ri. De plus, il existe F telle que $F' = f$ et on a : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Lemme 6.2 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.*

Démonstration : Si par exemple f n'était pas majorée, posons pour tout n, $x_n = \sup f^{-1}([n,+\infty[)$. La suite x_n décroît.Soit x sa limite dans $[a,b]$. Comme f est continue,$\lim_n f(x_n) = f(x)$ or $\lim_n f(x_n) = +\infty$ *absurde !*

<u>*q.e.d.*</u>

Démonstration du théorème : Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$|y - x| \le 2\delta_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon \ .$$

Lemme 6.3 *Il existe $x_1, ..., x_n \in [a,b] \ : \ [a,b] \subseteq \cup_i [x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}]$.*

Démonstration de ce lemme : Soit $E = \{a \le t \le b \ : \ {}^\exists x_1, ..., x_n \in [a,b] \ : [a,t] \subseteq \cup_i [x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}]\}$. Comme a est dans cet ensemble, il est non vide et $c = \sup E$ existe. Par définition de la borne sup, il existe $t \in E$ tel que $a \le t > c - \delta_c$. Alors $[a, c + \delta_c] \subseteq \cup_i [x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}] \cup [c - \delta_c, c + \delta_c]$. Donc $c + \delta_c \in E$ contradiction sauf si $c = b$ et dans ce cas $[a,b] \subseteq \cup_i [x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}] \cup [b - \delta_b, b + \delta_b]$.

<u>*q.e.d.*</u>

Soit $\eta = \min_i \{\delta_{x_i}\} > 0$. Alors $|x - y| \le \eta \Rightarrow {}^\exists i$, $|x - x_i| \le \delta_i$ et alors $|y - x_i| \le |x - y| + |x - x_i| \le 2\delta_i \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \le 2\epsilon$.

Donc si $\Delta = \{a + i\frac{b-a}{n} \ : \ 0 \le i \le n\}$ avec n assez grand pour que $\frac{b-a}{n} \le \eta$, on a pour tout i, $M_i - mi_i \le 2\epsilon$ où $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$ et $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$. Donc $S^\Delta f - S_\Delta f \le 2\epsilon$.

Ainsi f est bien Ri.

<u>*q.e.d.*</u>

Corollaire 6.3.1 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux,* i.e. *il existe $\Delta = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que ${}^\forall k$, $f\big|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est continue et $\lim_{\substack{x \to x_k \\ x < x_k}} f$, $\lim_{\substack{x \to x_k \\ x > x_k}}$ existent pour tout k, alors f est Ri sur $[a,b]$.*

Proposition 6.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $F : x \mapsto \int_a^x f$ est une fonction dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$*

Démonstration : Nous allons montrer que si f est Ri sur $[a,b]$, si $\lim_{\substack{x \to c \\ x \ne c}} f = l$ existe alors $x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable en c de dérivée $F' = l$. On a si $x \ne c$:

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - l = \frac{1}{x - c} \int_c^x (f - l) \ .$$

Soit *epsilon* > 0. Il existe $\eta > 0$ tel que $|x-c| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \epsilon$. Donc $|x-c| < \eta \Rightarrow \left|[\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - l\right| \leq \frac{1}{|x-c|}|\int_c^x |f-l|| \leq \epsilon$. <u>*q.e.d.*</u>

Théorème 6.5 (fondamental de l'analyse) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' est Ri sur $[a,b]$.*

$$\textit{Alors } f(b) - f(a) = \int_a^b f' \ .$$

Contre-exemple : la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}) \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
est dérivable mais sa dérivée n'est pas Ri, n'étant pas bornée ...

Démonstration : Soit $\Delta = \{x_0 < ... < x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f'(c_i)$$

pour certains $x_i < c_i < x_{i+1}$ (théorème des accroissements finis). Mais alors :

$$S_\Delta f \leq f(b) - f(a) \leq S^\Delta f$$

et cela étant vrai pour toute subdivision Δ, $f(b) - f(a) = \int_a^b f$. <u>*q.e.d.*</u>

7 Intégration par parties

Théorème 7.1 *Si u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv' \ .$$

Exercice 1 *Calculer $\int_0^\pi x \sin x dx$, $\int_0^1 x^2 e^x dx$, $\int_1^x \ln t dt$, $\int_0^1 \arctan x dx$.*

8 Changement de variables

Théorème 8.1 *Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\phi([a,b]) \subseteq I$. Alors :*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx \ .$$

b) *Si de plus ϕ est bijective $[a,b] \to [\phi(a), \phi(b)]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt \ .$$

Exercice 2 *Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$.*