COURS DU MERCREDI 15/3/17

8 Changement de variables (suite)

Si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

a) si f est paire, $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$;

b) si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f = 0$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période T, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

en effet, $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f$*. Or, en posant* $y = x - T$*, on a :* $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y)dy$ *et* $\int_a^0 f + \int_T^{a+T} f = 0$.

9 Théorème de la moyenne

Lemme 9.1 *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions Ri. Alors* fg *aussi.*

Démonstration :

Supposons pour commencer que $\boldsymbol{f, g \geq 0}$. Soit $\epsilon > 0$. Soit Δ une subdivision de $[a, b]$ telle que $S^{\Delta} f - S_{\Delta} f < \epsilon$. Soit Δ' une subdivision de $[a, b]$ telle que $S^{\Delta'} g - S_{\Delta'} g < \epsilon$. Soit $\Delta" = \Delta \cup \Delta'$. On a $\Delta \subseteq \Delta"$ donc :

$$S_{\Delta} f \leq S_{\Delta''} f \leq S^{\Delta"} f \leq S^{\Delta} f$$

et :

$$S^{\Delta"} f - S_{\Delta"} f < \epsilon$$

de mÃłme :

$$S^{\Delta"} g - S_{\Delta"} g < \epsilon \ .$$

Notons $\Delta" = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ et pour tout $0 \leq i \leq n-1$ et toute fonction h sur $[a, b]$, $M_i h = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} h$ et $m_i h = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} h$.

On a donc :

$$S^{\Delta"}(fg) - S_{\Delta"}(fg) = \sum_i (x_{i+1} - x_i)(M_i(fg) - m_i(fg))$$

or, si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $m_i(f)m_i(g) \leq f(x)g(x) \leq M_i(f)M_i(g)$. Donc :

$$m_i(f)m_i(g) \leq m_i(fg) \leq M_i(fg) \leq M_i(f)M_i(g) \ .$$

D'oÃź :

$$S^{\Delta"}(fg) - S_{\Delta"}(fg) \leq \sum_i (x_{i+1} - x_i)(M_i(f)M_i(g) - m_i(f)m_i(g))$$

$$\leq \sum_i (x_{i+1}-x_i)(M_i(f)(M_i(g)-m_i(g))+m_i(g)(M_i(f)-m_i(f))$$

$$\leq \sup_{[a,b]} f \sum_i (x_{i+1}-x_i)(M_i(g)-m_i(g)) + \sup_{[a,b]} g \sum_i (x_{i+1}-x_i)(M_i(f)-m_i(f))$$

$$\leq \sup_{[a,b]} f(S^{\Delta"}(g)-S_{\Delta"}(g)) + \sup_{[a,b]} g(S^{\Delta"}(f)-S_{\Delta"}(f)$$

$$\leq (\sup_{[a,b]} f + \sup_{[a,b]} g)\epsilon$$

C'est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc fg est Ri sur $[a,b]$.

Si f, g ne sont plus forcément ≥ 0.

On pose $f^+ = \max\{f,0\}$, $f^- = \max\{-f,0\}$. On a bien entendu :

$$f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-,\ f^+, f^- \geq 0\ .$$

En particulier, $f^+ = \frac{1}{2}(f+|f|)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$ sont Ri car f Ri $\Rightarrow |f|$ Ri.

Donc $fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ + f^-g - f^+g^- - f^-g^+$ est Ri.

q.e.d.

Théorème 9.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $g \geq 0$ est intégrable sur $[a,b]$ alors fg est intégrable et il existe $a \leq c \leq b$ tel que :*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g\ .$$

Cas particulier : il existe $a \leq c \leq b$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\ .$$

Démonstration : Pour le cas particulier, il suffit de prendre $g = 1$. Cas général : Considérons la fonction :

$$h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \int_a^b g\ .$$

La fonction h est continue. Soit $x_o \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{[a,b]} f$ et soit $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = \inf_{[a,b]} f$. Alors comme f, g sont Ri, fg aussi et : $f(x_1) \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq f(x_0) \int_a^b g$ *i.e.* :

$$h(x_1) \leq \int_a^b fg \leq h(x_0)$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à h entre x_1 et x_0, il existe $c \in [x_0, x_1] \subseteq [a,b]$ tel que $h(c) = \int_a^b fg \Leftrightarrow \int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$. *q.e.d.*

10 Limites de sommes de Riemann

Notations : si Δ est une subdivision de $[a, b]$, on pose $h_\Delta = \max_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)$ le pas de la subdivision. Si Δ est subdivision et si pour tout i, $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, on pose $S_{\Delta,\xi}(f) = \sum_i (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$.

Théorème 10.1 *Soit f Ri sur $[a, b]$. Alors*

$$\lim_{h_\Delta \to 0} S_{\Delta,\xi}(f) = \int_a^b f \ .$$

Cas particulier :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f \ .$$

Exercice 1

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \ln 2$$

Solution : $\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}$.

Exercice 2

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \pi/4 \ .$$

11 Intégrales de Wallis

Théorème 11.1

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2.4.....(2p-2)2p}{1.3....(2p-3)(2p-1)}\right)^2 = \pi \ .$$

Lemme 11.2 *Posons $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$. Alors :*

$$I_{2n} = \frac{1.3....(2n-3)(2n-1)}{2.4...(2n-2)2n} \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2.4...(2n-2)2n}{1.3...(2n-1)(2n+1)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : On pose $u' = \sin t$ et $v = \sin^{n-1} t$. D'oÃź $u = -\cos t$ et $v' = (n-1)\sin^{n-2}\cos t$ et :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n tdt = [uv]_o^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 tdt$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

(si $n \geq 2$) d'oÃź la formule de récurrence ${}^\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n}$. De plus on a :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} = \pi/2 \text{ et } I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin tdt = 1 \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Démonstration du théorème : D'après le lemme, on a :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2.4.....(2p-2)2p}{1.3....(2p-3)(2p-1)}\right)^2 = \frac{2p+1}{2p}\pi\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$$

or, si $0 \leq t \leq \pi/2$, $0 \leq \sin t \leq 1 \Rightarrow \sin^{2p+2} t \leq \sin^{2p+1} t \leq \sin^{2p} t \Rightarrow I_{2p+2} \leq I_{2p+1} \leq I_{2p}$ et donc :

$$\frac{2p+1}{2p} = \frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_p \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1 \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

12 À propos de l'intégrale d'une fonction Riemann-intégrable strictement positive

Théorème 12.1 *Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Si f est Ri sur $[a,b]$ et si ${}^\forall x \in]a,b[,\ f(x) > 0$, alors :*

$$\int_a^b f > 0 \ .$$

En pariculier, si f est Ri sur $[a,b]$ et si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f^{-1}(\{0\})$ est dense dans $\mathbb{R}$ i.e. *pour tout intervalle $I \subseteq [a,b]$ de longueur > 0, $I \cap f^{-1}0 \neq \emptyset$.*