COURS DU MARDI 21/3/17

13 Calcul de primitives

Notation : si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, si F est une primitive de f, on note $\int f(t)dt = F(t) + k$. Cette notation signifie que l'ensemble des primitives de f sur **l'intervalle** I est formé des fonctions de la forme $t \mapsto F(t) + k$ où k est une constante.

13.1 Primitives à connaître par cœur

En face de chaque fonction f de la première colonne, on a placé une primitived de f dans la deuxième colonne :

$f(x)$	$F(x)$
x^α, $\alpha \neq 1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
e^x	e^x
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$
$\text{cotan} x$	$\ln \lvert \sin x \rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{cotan} x$
$\text{sh} x$	$\text{ch} x$
$\text{th} x$	$\ln \text{ch} x$
$\text{coth} x$	$\ln \text{sh} x$
$\frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$\text{th} x$
$\frac{1}{\text{sh}^2 x}$	$-\text{coth} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a > 0$	$\arcsin(x/a)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a > 0$	$\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln \lvert x + \sqrt{x^2-1} \rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a > 0$	$\ln \lvert x + \sqrt{x^2-a^2} \rvert$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$	$\frac{1}{a} \arctan(x/a)$
$\frac{1}{a^2-x^2}$, $a > 0$	$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x+a}{x-a} \right\rvert$

13.2 Primitives des fractions rationnelles

Si F est une fraction rationnelle, pour calculer $\int F$, on commence par décomposer F en éléments simples et on se ramène à calculer des primitives de polynômes et des primitives de la forme :

$$\int \frac{1}{(x-a)^h} dx = \begin{cases} \frac{1}{(1-h)(x-a)^{h-1}} + k \text{ si } h \geq 2 \\ \log|x-a| + k \text{ si } h = 1 \end{cases}$$

et de la forme :

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}$$

ou $h \geq 1$.

Dans ce cas, on écrit $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}$ sous la forme :

$$\frac{2\alpha(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^h} + \frac{\beta}{((x-p)^2+q^2)^h}$$

avec $q > 0$ et α, p à déterminer. On a :

$$\int \frac{2\alpha(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^h} dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{(1-h)((x-p)^2+q^2)^{h-1}} + k \text{ si } h \geq 2, \\ \alpha \ln((x_p)^2+q^2) + k \text{ si } h = 1. \end{cases}$$

Pour le second terme, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I_h = \int \frac{dx}{(x^2+q^2)^h} &= \frac{x}{(x^2+q^2)^h} + 2h \int \frac{x^2}{(x^2+q^2)^{h+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+q^2)^h} + 2hI_h - 2hq^2 I_{h+1} \end{aligned}$$

d'où :

$$2hq^2 I_{h+1} = (2h-1)I_h + \frac{x}{(x^2+q^2)^h} \quad .$$

On rappelle que

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+q^2} = \frac{1}{q} \arctan(x/q) \quad .$$

Exercice 1

$$\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k$$

13.3 Primitives des fractions rationnelles en e^x

Si R est une fraction rationnelle, alors $\int R(e^x)dx = \int \frac{R(t)}{t}dt$, en posant $t = e^x$ et on est ramené au calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple : $\int \frac{1}{e^x+1} = x - \ln(e^x + 1) + C$.

13.4 Primitives des fonctions en $\sin x$ et $\cos x$

13.4.1 Polynômes

Pour calculer $\int \sin^m x \cos^n x dx$,

a) si m ou n est impair, par exemple si $n = 2p + 1$, on pose $t = \sin x$:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m ((1 - t^2)^p dt \ ...$$

b) si m, n sont pairs, on linéarise :
on exprime $\cos^m x \sin^n x$ comme une combinaison linéaire de $\cos kx$ et $\sin lx$, $k, l \in \mathbb{N}$; par exemple :

$$\int \cos^4 x dx = ???$$

On a :

$$\cos^4 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^4}{2^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 4\frac{e^{i2x} + e^{-2ix}}{2} + 3\right)$$

$$= \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + 3/8 \ .$$

Donc $\int \cos^4 x dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + 3x/8 + k$.

13.4.2 Fractions rationnelles

Si R est une fraction rationnelle en deux variables,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}...$$

en posant $t = \tan(x/2)$, $dt = \frac{1}{2}(t^2 + 1)dx$.

Remarques importantes (règles de Bioche) :

– si l'expression $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangée en changeant x en $\pi - x$, on pose $t = \sin x$;

– si l'expression $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangée en changeant x en $-x$, on pose $t = \cos x$;
– si l'expression $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangée en changeant x en $\pi+x$, on pose $t = \tan x$;

et on se ramènre à primitiver des fractions rationnelles au dénominateur de degré moins grand.

ATTENTION : dx doit faire partie de l'expression invariante.

Exercice 2

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx =?$$

13.5 Intégrales abéliennes

13.5.1 $\boldsymbol{\int (R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)}$ où $\boldsymbol{R}$ est une fraction rationnelle, $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}^*}$, $\boldsymbol{ad - bc \neq 0}$

On pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, d'où $x = \frac{dt^n - b}{a - t^n c}$ et $dx = \left(\frac{dt^n - b}{a - t^n c}\right)' dt$.

Exercice 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}$$

indication : on pose $t = \sqrt[6]{1+x}$.