Remarque : $\int \sqrt{x^2-1}dx$ peut s'intégrer par parties ...

13.0.1 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ où $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$

On écrit $y = \sqrt{a}\sqrt{q^2+(x-p)^2}$ et on pose $x-p = q\mathrm{sh}t$ (y devient $q\sqrt{a}\mathrm{ch}t$)

Exercice 1 *Calculer* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Chapitre VII
Approximations des fonctions

1 Dérivées $n-$ièmes

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On note $f^{(0)} := f$. Si $a \in I$, on dit que f est $n-$fois dérivable en a s'il existe un intervalle ouvert $a \in J \subseteq I$ telle que f est $n-1$ fois dérivable en tout point de J et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a ; on note alors $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, on dit que f est $\mathscr{C}^\infty$.

Ex : les polynômes, $x \mapsto e^x$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1 (Formule de Leibniz) *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient f, g sont des fonctions $I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$. Si $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent alors fg est $n-$fois dérivable en a et :*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}(a) \ .$$

Démonstration : Récurrence sur n. Rappelons que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et que ;

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

q.e.d.

2 Théorème des accroissements finis

Proposition 2.1 *Soient* $a < b \in \mathbb{R}$. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *admet un extremum relatif en* $a < c < b$ *et si* $f'(c)$ *existe alors* $f'(c) = 0$.

Démonstration :

Définition 1 *On dit que* f *a un maximum relatif en* c *s'il existe un intervalle ouvert* $c \in I \subseteq [a,b]$ *tel que* ${}^\forall x \in I,\ f(x) \leq f(c)$.

Si f a un maximum relatif en c, alors

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

et

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

q.e.d.

Théorème 2.2 (Rolle) *Si* f *est continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$, *si* $f(a) = f(b)$, *alors il existe* $a < c < b$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Théorème 2.3 (des accroissements finis) *Si* f *est continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$ *alors il existe* $a < c < b$ *tel que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Démonstration : On considère $g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a $g(a) = g(b)$ et $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. *q.e.d.*

Corollaire 2.3.1 *Une fonction est croissante sur* $[a,b]$ *si et seulement si* $f' \geq 0$, *constante si et seulement si* $f' = 0$.

Théorème 2.4 (des accroissements finis généralisés) *Si* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sont continues sur* $[a,b]$ *et dérivables sur* $]a,b[$, *alors il existe* $a < c < b$ *tel que* $(f(b) - f(a)g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Corollaire 2.4.1 (Règle de L'Hospital) *Si* $f(a) = g(a) = 0$, *si* $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ *existe, alors* $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Ex : $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\mathrm{ch} x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\mathrm{sh} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{\mathrm{ch} x} = -1$.

3 Formules de Taylor Lagrange

Théorème 3.1 *Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On suppose f $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe $a < c < b$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$$

Théorème 3.2 *Posons $g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - ... - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est choisi pour que $g(a) = 0$.*

Il suffit de poser $A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - f(a) - ... - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right)$.

On applique le théorème de Rolle à g : il existe $a < c < b$ tel que $g'(c) = 0$. Or

$$g'(c) = -f'(c) + f'(c) - (b-c)f''(c) + ... + \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) - \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + A\frac{(b-c)^n}{n!}$$

$$= -\frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + A\frac{(b-c)^n}{n!}$$

donc $g'(c) = 0 \Leftrightarrow A = f^{(n+1)}(c)$.

Exemples :

a) $\forall x \geq 0,\ x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x - x^2/2 + x^3/3$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x^2/2 \leq \cos x \leq 1 - x^2/2 + x^4/24$.