Théorème 3.1 (avec reste intégral) *Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \ .$$

Démonstration : Récurrence sur n et intégration par parties ... q.e.d.

Théorème 3.2 (Taylor-Young) *Si f est $n-$fois dérivable en a, alors*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\epsilon(h)$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Autre notation :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(h^n)$$

(cf. plus bas)

Démonstration : Soit $T(h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, $T^{(k)}(0) = f^{(n)}(a)$. Donc si on pose $g(h) = f(a+h) - f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$, on a :

$$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a) - f^{(k)}(a) = 0 \ .$$

D'après la règle de l'Hospital, on a alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(h)}{h^{n-1}} = ... = \lim_{h\to 0}\frac{g^{(n-1)}(h)}{h}$$

si cette dernière limite existe. C'est le cas, par définition, $\lim_{h\to 0}\frac{g^{(n-1)}(h)}{h} = g^{(n)}(0) = 0$.

q.e.d.

Exemples : $e^x = 1 + x + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + o(x^n)$.

4 Comparaison locale des fonctions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

Définition 1 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0, s'il existe C et un intervalle ouvert $x_0 \in J \subseteq I$ tel que :*

$$^\forall x \in J \setminus \{x_0\},\ |f(x)| \leq C|g(x)| \ .$$

Notation $f = O_{x_0}(g)$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, si $^\forall \epsilon > 0$, $^\exists J$ t un intervalle ouvert $x_0 \in J \subseteq I$ tel que :

$$^\forall x \in J,\ |f(x)| \leq \epsilon|g(x)| \ .$$

Notation $f = o_{x_0}(g)$.

On dit que f, g sont équivalentes au voisinage de x_0 si $f - g = o_{x_0}(g)$. Notation $f \sim g$.

Exercice 1 $f \sim g \Rightarrow g \sim f$

ATTENTION : il serait plus correct d'écrire $f \in O(g)$ car par exemple $x = O_0(1)$ et $x^2 = O_0(1)$ mais $x \neq x^2$. La notation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition : $x + 2 \sim_\infty x + 1$ et $-x \sim_\infty -x$ et pourtant $2 \not\sim_\infty 1$. En revanche, $f \sim g \Rightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$ et $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

Exemple : $\sin x \sim_0 x \sim_0 \tan x$.

5 Développements limités

Soit I un intervalle ouvert contenant $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 2 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un développement limité (d.l.) d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$f = a_0 + ... + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \ .$$

Proposition 5.1 (unicité) *Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 alors les a_i sont uniques.*

Proposition 5.2 *Si f admet un d.l. d'ordre $n \geq 1$ en x_0, alors f est dérivable en x_0 de dérivée a_1.*

Exercice 2 *La fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$ a un d.l d'ordre 2 en 0 mais $f"(0)$ n'existe pas.*

Proposition 5.3 *Soit $a > 0$ et soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction avec un d.l. d'odre n en 0 : $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$. Si f est paire les a_{2k+1} sont nuls ; si f impaire, les a_{2k} sont nuls.*

5.1 D.l. à connaître par cœur

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{k!}}_{\binom{\alpha}{n}}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

5.2 Opérations sur les *d.l.*

5.2.1 Somme, produit, quotient, composée

« $o(1).o(1) = o(1)$, $(o(1) - o(1) = o(1)$, $2o(1) = o(1)$, $f(x)o(1) = o(1)$ si f bornée »...

Exercice 3 *Développer à l'ordre* 2 *en* 0 $e^x \cos x$ *et* $\frac{\ln(1+x)}{1-x}$. *Développer à l'ordre* 5 *en* 0 $\tan x$

Théorème 5.4 *Soit I un intervalle ouvert qui contient 0. Soient P_n, Q_n des polynômes de degré $\leq n$. On suppose que $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$.*

Alors $f + g = P_n + Q_n + o(x^n)$,

$fg = R_n + o(x^n)$ où R_n est le reste de la division euclidienne de P_nQ_n par X^{n+1}.

Si $g(0) = Q(0) \neq 0$, alors $f/g = S_n + o(x^n)$ où S_n est de degré $\leq n$ et $P_n = S_nQ_n \bmod X^{n+1}$.