COURS DU MARDI 4/4/17

6.1 Formule de Stirling

Proposition 6.1 *Soit* $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$. *La suite* $\ln u_n$ *est croissante et il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $^\forall n \geq 0,\ \ln u_{n+1} - \ln u_n \leq \frac{C}{n^2}$.

Démonstration : $\ln(u_{n+1}/u_n) = 1 - (n+1/2)(\ln(1+1/n)$. Posons $f(x) = 1 - (x+1/2)(\ln(x+1) - \ln x)$. La fonction f est dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$^\forall x > 0,\ f'(x) = -(\ln(x+1) - \ln x) - (x+1/2)(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})$$

$$= \ln x - \ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x}$$

$$^\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2x^2}$$

$$= \frac{-1/4}{x^2(x+1)^2} < 0\ .$$

Donc f' décroît. Or $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ donc $f' > 0$ donc f croît. Or, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc $f < 0$.

On a donc la suite $-\ln u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \ln u_k - \ln u_{k+1} - \ln u_1$. Montrons que cette suite converge. On a $\ln(u_k/u_{k+1}) = 1 - (k+1/2)\ln(1+1/k)$

$$= -\frac{1}{12k^2} + o(1/k^2)\ .$$

Donc la suite $k^2 \ln(u_k/u_{k+1})$ est bornée car convergente.

Il existe $A > 0$ tel que $\ln(u_k/u_{k+1}) \leq A/k^2$. Donc $-\ln u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 - \ln u_1$. Donc $-\ln u_{k+1}$ est croissante et majorée donc converge, disons vers l. Donc u_k converge vers $e^{-l} = C > 0$ *i.e.* :

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\ .$$

q.e.d.

Théorème 6.2

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration : On a déjà démontré que $\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{(2...2p)}{1.3....(2p-1)}\right)^2 = \pi$. Or, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\left(\frac{(2...2p)}{1.3....(2p-1)}\right)^2 &= \frac{1}{p}\frac{((2^p p)!^2)^2}{(2p)!^2}\\ &\sim \frac{1}{p}\left[\frac{2^{2p}C^2 p\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}{C\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}\right]^2\\ &\sim \frac{[C\sqrt{p}]^2}{2p} \sim \frac{C^2}{2} \quad .\end{aligned}$$

Donc $C^2/2 = \pi i.e.\ C = \sqrt{2\pi}$.

Conclusion : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. *q.e.d.*

6.2 Intégrale de Gauss

Théorème 6.3

$$\lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

Démonstration : $\int_{-X}^{X} e^{-t^2}dt = 2\int_0^X e^{-t^2}dt$. Or :

$$^\forall 0 \leq t \leq \sqrt{n},\ (1-t^2/n)^n \leq e^{-t^2} \leq (1+t^2/n)^{-n} \quad .$$

En effet, $\ln(1-u) \leq -u$ *si* $0 < u < 1$ *et* $\ln(1+u) \leq u$ *si* $u \geq 0$. Or en posant $t = \sqrt{n}\cos u$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1-t^2/n)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1} udu$$

et en posant $t = \sqrt{n}\mathrm{cotan} u$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1+t^2/n)^{-n} dt = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^{2n-2} udu \leq \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2} udu \quad .$$

Comme $\int_0^{\pi/2}\sin^n tdt \sim \sqrt{\pi}\sqrt{2n}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad .$$

q.e.d.

6.3 Somme des inverses des carrés d'entiers

Théorème 6.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Lemme 6.5

$$\frac{\mathrm{sh} x}{x} = \lim_n \frac{(1+x/n)^n - (1-x/n)^n}{2}$$

Lemme 6.6 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $n = 2p+1$, alors :*

$$\frac{(1+x/n)^n - (1-x/n)^n}{2} = x \prod_{k=1}^{p} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \tan^2(k\pi/n)}\right)$$

Démonstration : Si n impair, alors le terme de plus haut degré de $\frac{(1+x/n)^n-(1-x/n)^n}{2}$ est $\frac{x^n}{n}$ et ses racines sont :

$$(1+x/n)^n - (1-x/n)^n = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1+x/n}{1-x/n}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x/n}{1-x/n} = e^{2ik\pi/n},\ -p \leq k \leq p\ .$$

Or si $\omega = e^{2ik\pi/n}$, on a :

$$\frac{1+x/n}{1-x/n} = \omega \Leftrightarrow (x/n)(\omega+1) = \omega - 1$$

$$\Leftrightarrow x = n\frac{n(\omega - 1}{\omega + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = n\frac{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n} - e^{-ikpi/n})}{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n} + e^{-ikpi/n})}$$

$$\Leftrightarrow x = n\frac{2i\sin(k\pi/n)}{2\cos(k\pi/n)}$$

$$\Leftrightarrow x = in\tan(k\pi/n)$$

pour $-p \leq k \leq p$. Cela fait bien $2p+1 = n$ racines distinctes vu que tan est injective sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

Donc $\frac{(1+x/n)^n-(1-x/n)^n}{2} = \frac{1}{n^n}\prod_{k=-p}^{p}(x - in\tan(k\pi/n))$

$$= \frac{x}{n}\prod_{k=1}^{p}(x/n - i\tan(k\pi/n))(x/n + i\tan(k\pi/n))$$

$$= \frac{x}{n} \prod_{k=1}^{p} (x^2/n^2 + \tan^2(k\pi/n))$$

$$= \frac{x}{n} \prod_{k=1}^{p} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \tan^2(k\pi/n)}\right) \prod_{k=1}^{n} \tan^2(k\pi/n)$$

Ce produit a pour coefficient devant x :

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} \tan^2(k\pi/n)}{n}$$

qui doit être égal au coefficient devant x de $\frac{(1+x/n)^n - (1-x/n)^n}{2}$ *i.e.* : 1. Donc :

$$\frac{(1 + x/n)^n - (1 - x/n)^n}{2} = \frac{x}{n} \prod_{k=1}^{p} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \tan^2(k\pi/n)}\right) \quad .$$

q.e.d.

Lemme 6.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{x^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) + o(x^3)$$

Démonstration : En effet, $\ln(1+u) = u + o(u)$ donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 + o(x^2) \quad .$$

q.e.d.

Lemme 6.8

$$\ln\left(\frac{\text{sh} x}{x}\right) = \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

Démonstration du théorème : On a pour tout $0 < x < \pi/2$, $x < \tan x$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2 \tan^2(k\pi/n)}\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leq \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 \quad .$$

Et si $p \geq P_0$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) - \sum_{k=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2 \tan^2(k\pi/n)}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{P_0} \left[\ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) - \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right) \right] + \sum_{k=P_0+1}^{p} \ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{P_0} \left[\ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) - \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right) \right] + \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{k=P_0+1}^{p} 1/k^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{P_0} \left[\ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) - \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right) \right] + \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{k=P_0+1}^{\infty} 1/k^2$$

Or pour tout $\epsilon > 0$, il existe P_0 tel que $\sum_{k=P_0+1}^{\infty} 1/k^2 < \epsilon$. Et si P_0 est fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) - \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right) = 0$$

pour tout $1 \leq k \leq P_0$. Donc il existe P tel que $p \geq P \Rightarrow$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{p} \ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) - \sum_{k=1}^{p} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right) \leq 2\epsilon \;.$$

D'où $\ln(\mathrm{sh}x/x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x/n)^n-(1-x/n)^n}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.
Par unicité du d.l. à l'ordre 2 en 0 on a :

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \;.$$

q.e.d.

6.3.1 Autre méthode

Exercice 1 *a) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à* $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$ *entre* 0 *et* u *à l'ordre* n.

b) Montrer que $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

c) Montrer que $\int_0^{\pi/2} t = \pi^2/8$.

d) En utilisant les formules trouvées dans un cours précédent pour $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$*, montrer que* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \pi^2/8$.

e) En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.