COURS DU MERCREDI 5/4/17

Chapitre VIII
Les fonctions convexes

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur > 0.

1 Définitions

Définition 1 (convexe, concave) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si* $^\forall a, b \in I$, $^\forall 0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \ .$$

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est concave si $^\forall a, b \in I$, $^\forall 0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \ .$$

Proposition 1.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors :*

$$^\forall x_1, ..., x_n \in I,\ ^\forall t_1, ..., t_n > 0,\ f\left(\frac{t_1 x_1 + .. + t_n x_n}{t_1 + .. + t_n}\right) \leq \frac{t_1 f(x_1) + ... + t_n f(x_n)}{t_1 + ... + t_n}.$$

Proposition 1.2 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, l'application :*

$$I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante.

Théorème 1.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérvable. Sont équivalentes :*

(i) f *est convexe ;*

(ii) f' *est croissante ;*

(iii) « le graphe de f est au-dessus des ses tangentes ».

Corollaire 1.3.1 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors f est convexe $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

Exemples : $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ et ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Inégalités classiques

Théorème 2.1 (Inégalité arithmético-géométrique) *Si* $x_1, ..., x_n > 0$, *alors :*

$$(x_1 ... x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

Démonstration : La fonction ln est concave donc :

$$\ln\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1}{n} + ... + \frac{\ln x_n}{n} \; .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Théorème 2.2 (Inégalité de Hölder) *Si* $a_i, b_i \geq 0$, *si* $p, Q > 0$ *tels que* $1/p + 1/q = 1$, *alors :*

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_i b_i^q\right)^{1/q}$$

Remarque : si $p = q = 2$, x'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration : La fonction ln est concave donc $\forall x, y > 0$, $\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{\ln x}{p} + \frac{\ln y}{q}$. Donc :

$$x^{1/p} y^{1/q} \leq x/p + y/q \; .$$

On applique cette inégalité à :

$$x = \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p} \text{ et } y = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}$$

<u>*q.e.d.*</u>

Théorème 2.3 (Inégalité de Minkowski) *Si* $p \geq 1$, *si* $x_i, y_i \geq 0$, *alors :*

$$\left(\sum_i (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_i x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_i y_i^p\right)^{1/p}$$

Démonstration : On applique l'inégalité de Hölder à $a_i = x_i$, $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$, $q = \frac{p}{p-1}$. <u>*q.e.d.*</u>

Chapitre IX
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur > 0

Introduction

Une équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme :

$$y' = F(t, y)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur > 0, $F : I \times \mathbb{R}$ est une fonction continue et $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I à trouver.

Exemples :

a) $y' = 0 \Leftrightarrow y = c$ une constante réelle ;

b) si $a \in \mathbb{R}$, $y' = at \Leftrightarrow y(t) = ce^{at}$ pourune constante $c \in \mathbb{R}$. En particulier si $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation

$$y' = at,\ y(t_0) = y_0$$

a une unique solution : $y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$.

c) l'équation $y' = y^2 + 1$ n'a pas de solution définie sur $\mathbb{R}$. Si y est solution, alors $(\arctan y)' = 1 \Rightarrow y = \tan(t + b)$ pour une certaine constante $b \in \mathbb{R}$. Donc si y est définie sur l'intervalle I, alors $I \subseteq]-\pi/2, \pi/2[-b-k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

1.1 Cas homogène

Théorème 1.1 *Soit $a : I \to \mathbb{R}$ continue.*

a) $y' = a(t)y \Leftrightarrow y(t) = C \exp A(t)$ *où $C \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I.*

b) Si $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation

$$y' = a(t)y,\ y(t_0) = y_0$$

a une unique solution. C'est $y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$.