COURS DU MERCREDI 25/1

CHAPITRE I : MATRICES

1 Trace

La trace d'une matrice carrée A est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \ .$$

Proposition 1.1 *Soient* $A \in \mathscr{M}_{m,n}(K), B \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, *alors* $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$.

2 Déterminant

2.1 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\text{dét}\, A = |A| := ad - bc$.

Propriétés :

i) $\text{dét}\, AB = \text{dét}\, A \text{dét}\, B$;

ii) $\text{dét}\, A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible et dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.2 3×3

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, on pose

$$\text{dét}\, A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Propriétés :

i) $\text{dét} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$;

ii) $\text{dét}\,{}^tA = \text{dét}\,A$;

iii) si A a deux lignes ou deux lignes égales, alors $\text{dét}\,A = 0$;

iv) $\text{dét}\,AB = \text{dét}\,A\text{dét}\,B$;

v) $\text{dét}\,A = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{ij}|A^{ij}| = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{ij}|A^{ij}|$ où A^{ij} est la matrice 2×2 obtenue en barrant la ligne i et la colonne j.

Ces propriétes se démontrent directement à partir de la formule de définition ; pour la multiplicativité, les calculs sont un peu longs mais pas trop ...

Définition 1 (la comatrice) *On pose* $\widetilde{A} := ((-1)^{i+j}|A^{ij}|)_{1\leq i,j\leq 3}$.

Lemme 2.1 *On a toujours :*

$$A^t\widetilde{A} = {}^t\widetilde{A}A = \text{dét}\,AI_3$$

Démonstration : On a : <u>*q.e.d.*</u>

Théorème 2.2 *Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

3 Matrices équivalentes et matrices semblables

Si $A, B \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$, alors A, B sont équivalentes s'il existe $P \in \mathscr{M}_m(K)$ et $Q \in \mathscr{M}_n(K)$ inversibles telles que $A = PBQ$.

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$, alors A, B sont semblables s'il existe $P \in \mathscr{M}(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Remarques :

a) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont équivalentes car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) si A, B sont semblables, alors $\text{tr}A = \text{tr}B$ (car $\text{tr}(PBP^{-1} = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr}B$). En particulier les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semnlables.

c) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Exemple d'application

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ si $n \geq 1$.

Alors $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right)$. En effet, on pose $X_n := \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ si $n \geq 0$ et $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De sorte que : $X_{n+1} = AX_n$. Donc, $X_n = AX_0 = A^t(0,1) =$ la deuxième colonne de A.

Or, $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta' \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$, $\delta := (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ et $\delta' := (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

Par conséquent, $A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \delta^n & 0 \\ 0 & \delta'^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} ? & \delta^n - \delta'^n \\ ? & \delta^{n+1} - \delta'^{n+1} \end{pmatrix}$.

D'où le résultat