1.2 Cas général

Théorème 1.1 *Soit :*

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E}$$

où a, b sont continues sur I.

a) Si y_P est une solution particulière de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y = y_P + y_h$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée :

$$y' = a(x)y$$

(E_h).

b) **méthode de variation de la constante** *: On peut trouver une solution particulière de (E) sous la forme :*

$$y_P(x) = C(x)\exp A(x)$$

où C est une fonction dérivable à déterminer et A une primitive de a sur I.

c) Si $t_0 \in I$ et si $y_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique solution sur I à l'équation :

$$y' = a(x)y + b(x),\ \ y(t_0) = y_0\ \ .$$

Démonstration :

a) $(y - y_P)' = a(x)(y - y_P)$.

b) si $y = C\exp A$, alors $y' = a(x)y + b(x) \Leftrightarrow C'\exp A + a(x)C\exp A = a(x)C\exp A + b(x)$

$$\Leftrightarrow C' = b(x)\exp(-A)...$$

c) D'après ce qui précède, $y' = a(x)+b(x)$ et $y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y = C(x)\exp A(x)$ avec $C(x) = y_0 + \int_{t_0}^{x} b(s)\exp(-A(s))ds$.

q.e.d.

Exercice 1 *Résoudre $y' + y = \sin x$ et $(1 + x^2)y' = xy + (1 + x^2)$.*

2 Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

Ce sont les équations de la forme :

$$y'' + by' + cy = f(x) \tag{E}$$

où f est une fonction continue sur un intervalle I. L'inconnue est une fonction y deux fois dérivable sur I.

2.1 Cas homogène

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit l'équation :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E}$$

Remarque : l'ensemble des solutions y de (E) est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel de l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Théorème 2.1 *i) Si $x^2 + aX + b$ a deux racines réelles $r_1 \neq r_2$, alors*

$$\{\textit{solutions de } (E)\} = \{\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \ : \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Si $X^2 + aX + b$ a une racine double r, alors

$$\{\textit{solutions de } (E)\} = \{(\lambda x + \mu)e^{rx} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \ .$$

Si X^2+aX+b a deux racines complexes conjuguées non réelles : $r \pm i\omega$, $r \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\{\textit{solutions de } (E)\} = \{e^{rx}(\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x) \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \ .$$

ii) L'espace des solutions de (E) est de dimension 2 et l'application linéaire :

$$y \mapsto (y(x_0), y'(x_0))$$

est un isomorphisme (pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$).

iii) En particulier, si $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique solution de E telle que $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Démonstration : b) Montrons que si $y''+by'+cy=0$, $y(x_0)=y'(x_0)=0$, alors $y=0$.

Posons pour $x \geq x_0$, $Y(x)=\sup_{x_0\leq t\leq x}\{|y(t)|,|y'(t)|\}$ et $M=\max\{1,|a|+|b|\}$. Par récurrence sur $n\geq 0$:

$$^{\forall}n\geq 0,\ ^{\forall}x_0\leq t\leq x,\ \max\{|y(t)|,|y'(t)|\}\leq Y(x)M^n\frac{(t-x_0)^n}{n!}\ .$$

Or $\lim_{n\to\infty} r^n/n!=0$ pour tout $r\geq 0$. Donc $y(x)=0$ si $x\geq x_0$. De même si $x\leq x_0$ ... <u>*q.e.d.*</u>

Exemples :

a) $y''+y=0 \Leftrightarrow y(x)=A\cos x+B\sin x,\ A,B$ constantes ;

b) $y''+2y'+y=0 \Leftrightarrow y(x)=(Ax+B)e^{-x},\ A,B$ constantes ;

c) $y''-3y'+2y=0,\ y(0)=y'(0)=1 \ \Leftrightarrow\ y(x)=Ae^x+Be^{2x}$ avec :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A+2B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A=1,\ B=0\ .$$

Donc $y''-3y'+2y=0,\ y(0)=y'(0)=1 \ \Leftrightarrow\ y(x)=e^x$.