COURS DU MERCREDI 12/4/17

PROGRAMME DE RÉVISION POUR L'EXAMEN PARTIEL DU 26/4 :
EXERCICE 5 FEUILLE 7
EXERCICE 2 FEUILLE 9
EXERCICE 4 FEUILLE 10

Exercice : résoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

2.2 $y'' + by' + cy = f(x)$

2.2.1 où $f(x) = P(x) \exp \alpha x (C \cos \omega x + S \sin \omega x)$

avec P un polynôme, $\alpha, C, S, \omega \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.1 *L'équation*

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

(E) *admet une unique solution particulière de la forme :*

$$y_P(x) = x^m \exp \alpha x (Q(x) \cos \omega x + S(x) \sin \omega x)$$

où Q, S sont des polynômes de degrés $\leq=$ $\deg P$ et $m = 0, 1$ ou 2 est la multiplicité de $\alpha + i\omega$ comme racine de $X^2 + aX + b$.

Exercice 1 *Résoudre :*

a) $y'' + y = 0$.

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ *et* $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

c) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

d) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

e) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$.

f) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$.

g) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

h) $y'' + y = \sin x$.

Exercice 2 *Résoudre* $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$. *Indication : on cherche une solution particulière de* $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ *puis une solution particulière de* $y'' - 3y' + 2y = 6x$ *puis on fait la somme des deux ....*

2.2.2 $y'' + by' + cy = f(x)$, f quelconque

Lemme 2.2 *Soient u, v deux solutions d'une équation :*

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E}$$

alors

$$^\forall x \in \mathbb{R}, uv'(x) - u'v(x) = 0$$

ou bien :

$$^\forall x \in \mathbb{R},\ uv'(x) - u'v(x) \neq 0\ .$$

Démonstration : Posons $F = uv' - u'v$. Alors $F' = -aF$ donc $F(x) = Ce^{-ax}$, C constante. <u>*q.e.d.*</u>

Théorème 2.3 *Soit I un intervalle ouvert non vide, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x_0 \in I$, soient $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.*

a) *L'équation*

$$y'' + by + cy = f(x),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \tag{E}$$

a une unique solution.

b) *De plus, si u, v sont deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + by' + cy = 0$, si $\lambda, \mu : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables telles que :*

$$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = f \end{cases}$$

alors $y = \lambda u + \mu v$ est solution de

$$y'' + ay' + by = f\ .$$

c) *Réciproquement, si $y'' + ay' + by = f$, alors il existe λ, μ dérivables telles que*

$$\begin{cases} y = \lambda u + \mu v = 0 \\ y' = \lambda u' + \mu v' \end{cases}$$

(et on a forcément :

$$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = f \end{cases})$$

Démonstration du théorème :

Unicité : si y_1 et y_2 sont solutions de (E), alors $(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = 0$, $(y_1 - y_2)(x_0) = (y_1 - y_2)'(x_0) = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0$ d'après l'étude du cas homogène ...

Existence :

b) calcul facile.

c) Il suffit de poser pour tout $x \in I$, $\begin{pmatrix} \lambda(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$.

<u>*q.e.d.*</u>

Exercice 3 *Résoudre :* $y'' + y = \tan^2 x$.