CHAPITRE X RÉSOLUTIONS DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DE DEGRÉ 2, 3, 4.

1 Degré 2

Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On a :

$$X^2 + pX + q = \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 - \Delta$$

où $\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

Donc $x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta}$.

Exemple. Posons $z = e^{2i\pi/5}$. On a :

$$z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 = z^{-2}(1 - z^5)/(1 - z) = 0$$

$$\Rightarrow (z + z^{-1})^2 - 2 + 1 + z + z^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow C^2 + C - 1 = 0$$

où $C = z + z^{-1} = 2\cos 2\pi/5$. Donc $C = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ car $0 \leq 2\pi/5 \leq \pi/2 \Rightarrow \cos(2\pi/5) \geq 0$.

Donc $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 1 $\sin(2\pi/5) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

2 Degré 3

2.1 Élimination du terme x^2

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Si on pose $x' = x + \frac{a}{3}$, alors

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x'^3 + px' + q = 0$$

pour certains $p, q \in \mathbb{C}$.

Exercice 2 *On a* $p = b - \frac{a^2}{3}$ *et* $q = -\frac{4a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

2.2 Méthode de Cardan

Soient $p, q \in \mathbb{C}$.

On cherche une solution de

$$x^3 + px + q = 0$$

de la forme $x = u + v$.

On a :

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u+v) + q = 0$$

$$\Longleftarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Or ce dernier système a toujours des solutions !

En effet, soient U, V des racines de

$$T^2 + qT - (p/3)^3$$

i.e. prenons par exemple :

$$U = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta},\ V = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$$

où $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Soit $u = \sqrt[3]{U}$ une racine cubique de U. On choisit alors $v = \sqrt[3]{V}$ une racine cubique de V telle que $uv = -p/3$.

Exercice 3 *C'est toujours possible ! (quitte à changer v en jv ou j^2v).*

Notation. on pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 2.1 *Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que :*

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta},\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$$

et

$$uv = -p/3$$

ALORS :

$$X^3 + pX + q = (X - (u+v))(X - (ju + j^2v))(X - (j^2u + jv))\ .$$

Remarque. Autrement dit les racines de $x^3 + px + q$ sont :

$$x = u + v,\ x = ju + j^2v,\ x = j^2u + jv\ .$$

Démonstration : Il suffit de développer le terme de droite et d'utiliser que $1 + j + j^2 = (1 - j^3)/(1 - j) = 0$. <u>*q.e.d.*</u>