1 Comment résoudre un système linéaire ?

Un système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, ..., x_n$ est de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ ... &= ... \\ a_{m1} + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

On appellera $A := (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{mn}(K)$ la matrice du système et $\widetilde{A} := (A|b_i)$ sa matrice étendue.

Pour résoudre un tel système on peut utiliser la méthode de l'*élimination de Gauss.*

Définition 1 *Une transformation élémentaire du système est une transformation d'un des types suivants :*

(i) ajouter à une équation un multiple d'une autre équation ;

(ii) échanger deux équations ;

(iii) multiplier une équation par un nombre non nul.

Remarque : une transformation élémentaire du premier type ne modifie qu'une équation (celle à qui un multiple d'une autre est ajoué).

Clairement, une solution du système est aussi une solution du système obtenu après une opération élémentaire. Or Ces opérations élémentaires sont réversibles, le système de départ peut être retrouver à partir de celui d'arrivée par une opération élémentaire du même type. Par exemple, si on applique $L_i \leftarrow L_i + cL_j$, $i \neq j$, $c \neq 0$, on obtient une nouvelle ligne L_i' et les autres lignes ne changent pas. Si on applique $L_i' \leftarrow L_i' - cL_j$ on retrouve le système dont on est parti. Donc le système obtenu après une ou plusieurs opérations élémentaires est équivalent.

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & +x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 & +2x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 & -x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 2x_1 & -2x_3 + x_4 &= 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 & +x_3 &= 2 \\ x_2 & +2x_3 - x_4 &= 2 \\ -3x_2 & -3x_3 + 3x_4 &= -6 \\ -4x_2 & -4x_3 + x_4 &= -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 + 2x_2 & +x_3 & & = & 2 \\ x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & -3x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 + 2x_2 & +x_3 & & = & 2 \\ x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & & x_4 & = & -5/3 \end{array} \right.$$

On arrive à un *système échelonné i.e.* sa matrice étendue l'est.
Qu'est-ce qu'une matrice échelonnée ? ...

2 Matrices échelonnées

Le premier coefficient non nul d'une ligne $(a_1, ..., a_n) \in K^n$ non nulle est appelé son *pivot*. L'indice du premier coefficient non nul est l'*indice* du pivot.

Définition 2 (Matrice échelonnée) *On dit qu'une matrice A est échelonnée si :*

i) les indices des pivots des lignes non nulles forment une suite strictement croissante ;

ii) les lignes nulles si elles existent sont « en bas ».

Une matrice échelonnée est donc de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|cc|cc} & a_{1j_1} & ... & ... & ... & ... \\ \hline & & a_{2j_2} & ... & ... & ... \\ \hline & & & ... & ... & ... \\ \hline & & & & a_{rj_r} & ... \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

où les coefficients $a_{1j_1}, ..., a_{rj_r}$ sont non nuls et les coefficients à gauche $a_{kj}, j < j_k$ et en dessous $a_{i,j_k}, i > k$ sont tous nuls.

Comme pour les systèmes d'équations linéaires, on définit les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

Définition 3 (opération élémentaire) *Une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice est une transformation d'un des trois types suivants :*

(i) *ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un coefficient* $\in K$ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$, $\lambda \in K$ *;*

(ii) *échanger 2 lignes* $L_i \leftrightarrow L_j$ *;*

(iii) *multiplier une ligne par un coefficient non nul* $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$.

Exercice 1 *Les opérations élémentaires sont le résultat de la multiplication à gauche par*

(i) $T_{ij}(\lambda) := \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{M}_m(K)$ *(1 sur la diagonale,* λ *en position* (i,j) *des 0 ailleurs) (une matrice de transvection) ;*

(ii) $P_{ij} := \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} & & i & & & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{M}_m(K)$ *la matrice dont les coefficients sont tous nuls sauf les coefficients* (i,j), (j,i), (k,k) $k \neq i,j$ *qui valent 1 ;*

(iii) $D = \mathrm{diag}(1, ..., \lambda, ...1)$.

De plus chacune de ces matrices est inversible et :

$$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda),\ P_{ij}^{-1} = P_{ij},\ D^{-1} = \mathrm{diag}(1, ..., \lambda^{-1}, ...1)\ .$$

Théorème 2.1 *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(K)$. *On peut transformer* A *en une matrice échelonnée en un nombre fini d'opérations élémentaires. Le résultat est une matrice échelonnée à* r *pivots pour un certain* $r \leq m$.

Remarques : le nombre r de pivots est indépendant des opérations effectuées. Nous verrons que ce nombre est le rang de la matrice.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur m le nombre de lignes de A.

Si $m = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $m > 1$, soit j_1 la première colonne non nulle de A. Quitte à échanger la 1ère ligne avec une ligne i où le coefficient $a_{ij_1} \neq 0$, on peut supposer que $a_{1,j_1} \neq 0$. Après les opérations :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij_1}}{a_1 j_1} L_1$$

pour $1 < i \leq m$, on obtient une matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & a_{1j_1} & ... \\ 0 & ... & 0 & A' \end{pmatrix}$$

où A' est une matrice de taille $m - 1 \times n - j_1$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence ... *q.e.d.*

3 Comment résoudre un système échelonné ?

Corollaire 3.0.1 *Un système est équivalent à un système échelonné.*

Soit S un système échelonné. On note A sa matrice et $\widetilde{A}$ sa matrice étendue. Bien entendu, A est aussi échelonnée. Notons r le nombre de lignes non nulles de A et $\widetilde{r}$ celui de $\widetilde{A}$.

Il est clair que $\widetilde{r} = r$ ou $r + 1$.

Proposition 3.1 *a) Si $\widetilde{r} = r + 1$, alors le système n'a pas de solutions.*

b) Si $\widetilde{r} = r = n$, alors le système a une unique solution.

c) Si $\widetilde{r} = r < n$, appelons $j_1, ..., j_r$ les indices des pivots. On appellera $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$ les variables principales et les autres variables seront appelées variables libres. Il existe des coefficients $d_1, ..., d_r$, des coefficients $c_{i,k}$, $\leq i \leq r$, $1 \leq k \leq n$, $k \notin \{j_1, ..., j_r\}$ tels que les solutions du système sont les $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant :

$$\forall i,\ x_{j_i} = \sum_{k \in \mathscr{L}} c_{ik} x_k$$

où $\mathscr{L} := \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_r\}$. En particulier il y a strictement plus d'une solution et même un nombre infini si K l'est.

Démonstration : Si $\widetilde{r} = r+1$, alors la ligne $r+1$ est de la forme : $0x_1 + ... + 0x_n = b_{r+1}$ pour un $b_{r+1} \neq 0$. Un tel système n'a pas de solution.

Si $\widetilde{r} = r < n$ ... Voici un exemple :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = & 2 \\ x_2 + x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & -x_4 & = & 5 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_4 sont les variables principales et x_3 la variable libre. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x_1 & = & x_3 + 8 \\ x_2 & = & -x_3 - 3 \\ x_4 & = & -5 \end{cases}$$

q.e.d.

Théorème 3.2 *Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$ avec $m < n$ (il y a plus d'inconnues que d''équations), alors il existe $x_1, ..., x_n$ non tous nuls tels que*

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + ... + A_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \\ A_{m1}x_1 + ... + A_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Démonstration : (*exo*) *q.e.d.*

CHAPITRE II : ESPACES VECTORIELS

1 Corps

Soit K un corps.

2 Sous-espaces vectoriels

Additions et multiplication par un scalaire dans K^n

Si $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in K^n$, alors on pose $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

Si $\lambda \in K$, on pose $\lambda x := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

On notera 0 le vecteur $(0, ..., 0)$.

Propriétés : pour tous $x, y \in K^n$, $\lambda, \mu \in K$, on a :

a) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

b) $1x = x$.

c) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

d) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

e) $0x = 0$.

3 Sous-espaces vectoriels de K^n

Définition 4 (sous-espace) *On dit que $E \subseteq K^n$ est un sous-espace de K^n si E est non vide, si $^\forall x, y \in E, x + y \in E$ et si $^\forall x \in E {}^\forall \lambda \in K$, $\lambda x \in E$.*

Notation : $E \leq K^n$. Plus généralement, si $F \subseteq E$ est aussi un sous-$K-$space vectorie de K^n, on notera $E \leq F$.

Exemples : $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel. K^n est un sous-espace vectoriel.

Proposition 3.1 *Soit $E \subseteq K^n$. Alors E est un sous-espace vactoriel si et seulement si $0 \in E$, $^\forall x, y \in E$, $^\forall \lambda, \mu \in K$, $\lambda x + \mu y \in E$.*

Propriétés :

i) Si $E, F \leq K^n$, alors $E \cap F$ est aussi un sous-espace vectoriel de K^n.

ii) Si $E, F \leq K^n$, alors $E \cup F$ est un sous-espace vectoriel si et seulemnt si $E \leq F$ ou $F \leq E$.

Soient $v_1, ..., v_k \in K^n$, on note $\mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_k\}$ le plus petit sous-espace contenant $v_1, ..., v_k$. On vérifie aisément que :

$$\mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \ : \ \lambda_1, ...\lambda_k \in K\} \ .$$

Notation : $\mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_k\} = \langle v_1, ..., v_k \rangle = K v_1 + ... + K v_k$.

Exemple : $\{(x, y, z) \in K^3 \ : \ 2x + 3y + z = 0\} = \{(x, y, -2x - 3y) \ : \ x, y \in K\} = \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, -3) \ : \ x, y \in K\} = K(1, 0, -2) + K(0, 1, -3) = \mathrm{Vect}\{1, 0, -2), (0, 1, -3)\}$; c'est donc un sous-espace vectoriel de K^3.