COURS DU MERCREDI $1/2/17$

CHAPITRE II : ESPACES VECTORIELS

Opérations sur les sous-espaces

Soient $E, F \leq K^n$, alors $E \cap F \leq K^n$.

Soient $E_1, ..., E_k \leq K^n$. On note $E_1 + ... + E_k := \{x_1 + ... + x_k \ : \ x_1 \in E_1, ..., x_k \in E_k\}$.

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de K^n qui contient $E_1, ..., E_k$.

Vérifions que c'est bien un sous-espace :

stable par $+$: $x_1 + ... + x_k + y_1 + ... + y_k = (x_1 + y_1) + ... + (x_k + y_k)$;

stable par multiplication par un scalaire : $\lambda.(x_1 + ... + x_k) = (\lambda.x_1) + ... + (\lambda.x_k)$.

Notation : si $e \in K^n$, on pose $Ke := \{\lambda.e \ : \ \lambda \in K\}$ (c'est un sous-espace de K^n.

On a : $\text{Vect}\{e_1, ..., e_k\} = Ke_1 + ... + Ke_k$.

3 Familles génératrices, libres, bases

Définition 1 *Soit $E \leq K^n$.*

a) Si $e_1, ..., e_k \in K^n$, on dit que la famille $\{e_1, ..., e_k\}$ est libre ou linéairement indépendante si pour tous $t_1, ..., t_k \in K$, on a :

$$t_1 e_1 + ... + t_k e_k = 0 \Rightarrow t_1 = ... = t_k = 0\,;$$

sinon on dit que la famille est liée ; dit que la famille $\{e_1, ..., e_k\}$ est génératrice si $\wedge\{e_1, ..., e_k\} = E$;

b) si $e_1, ..., e_k \in E$, on dit que la famille $\{e_1, ..., e_k\}$ est une base de E si elle est libre et génératrice (de E).

Exemples :

a) soit $e_i := \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de $K^n = \mathscr{M}_{n1}(K)$; c'est la *base canonique* de K^n.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x+y+z=0 \right\}$.

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base du sous-espace des matrices de trace nulle.

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base du sous-espace des matrices 2×2 réelles symétriques.

f) Contre-exemple : la famille $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ est liée car $(1,2,3) - 2(4,5,6) + (7,8,9) = 0$.

Proposition 3.1 *a) Soit $e \in K^n$. Alors $\{e\}$ libre $\Leftrightarrow e \neq 0$.*

b) Si $e_1, e_2 \in K^n$, alors $\{e_1, e_2\}$ est libre $\Leftrightarrow e_1, e_2$ non colinéaires ie $e_1 \notin Ke_2$ et $e_2 \notin Ke_1$.

c) Si $e_1, ..., e_k \in K^n$, alors $\{e_1, ..., e_k\}$ est libre $\Leftrightarrow \{e_1, ..., e_{k-1}\}$ libre et $e_k \notin \{e_1, ..., e_k\}$.

Démonstration : dernier point : $\Rightarrow$: $e_k = t_1e_1 + ... + t_{k-1}e_{k-1} \Rightarrow t_1e_1 + ... + t_{k-1}e_{k-1} - 1.e_k = 0$ absurde.

$\Leftarrow$: si $t_1e_1 + ... + t_ke_k = 0$, alors $t_k = 0$ sinon $e_k = -t_1/t_ke_1 - ... - t_{k-1}/t_ke_{k-1} \in \langle e_1, ..., e_{k-1} \rangle$. Mais alors $t_1 = ... = t_{k-1} = 0$ car $\{e_1, ..., e_{k-1}\}$ est libre. *q.e.d.*

4 Dimension

Lemme 4.1 (d'échange) *Soit $E \leq K^n$ un sous-espace. Soit $\{f_1, ..., f_p\}$ une famille libre de E. Soit $\{e_1, ..., e_q\}$ une famille génératrrice de E. Alors il existe $1 \leq j \leq q$ tel que $\{f_1, ..., f_{p-1}, e_j\}$ est libre.*

Démonstration : Sinon, pour tout j, $e_j \in \langle f_1, ..., f_{p-1}\rangle$. Mais alors $f_p \in \langle e_1, ..., e_q\rangle \leq \langle f_1, ..., f_{p-1}\rangle$ absurde. *q.e.d.*

Corollaire 4.1.1 *Sous les hypothèses précédentes, $p \leq q$.*

Démonstration :

1) *Directement :* pour tout j, $f_j = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} e_i$. Si $p > q$, alors il existe $x_1, ..., x_p$ (*cf.* cours précédent) tel que $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}} {}^t(x_1, ..., x_p) = 0$ *i.e.* : $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = 0$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Mais alors :

$$0 = \sum_{i=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j)e_i$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j(\sum_{i=1}^{q} a_{ij}e_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j f_j$$

   absurde car les f_j sont indépendants.

2) *par le lemme d'échange :* grâge au lemme d'échange, on peut trouver $1 \leq j_1, ..., j_p \leq q$ tels que $\{e_{j_1}, ..., e_{j_p}\}$ est libre. Les indices $j_1, ..., j_p$ sont deux à deux distincts (sinon $\{e_{j_1}, ..., e_{j_p}\}$ n'est pas libre). On a donc forcément $p \leq q$.

q.e.d.

Corollaire 4.1.2 *Toutes les bases ont le même cardinal.*

Démonstration : Soit $E \leq K^n$. Si $\{e_1, ..., e_k\}$ et $\{e'_1, ..., e'_{k'}\}$ sont des bases de E, alors $\{e_1, ..., e_k\}$ est libre et $\{e'_1, ..., e'_{k'}\}$ génératrice donc $k \leq k'$. Mais comme $\{e'_1, ..., e'_{k'}\}$ est libre et $\{e_1, ..., e_k\}$ génératrice, on a aussi $k \geq k'$. *q.e.d.*

Corollaire 4.1.3 *Soit $E \leq K^n$.*

a) Le sous-espace E admet au moins une base.

b) Une famille libre maximale dans E est une base. Libre maximale signifie que si on ajoute un vecteur de E, on obtient une famille liée.

c) Une famille génératrice minimale de E est une base. génératrice minimale signifie que si on retire un vecteur de la famille, on obtient une famille qui n'est plus génératrice.

Démonstration :

a) Soit $d := \max\{k \geq 0 \ : \ ^\exists e_1, ..., e_k \in E, \{e_1, ..., e_k\}$ est libre$\}$. Comme la famille vide est libre et comme une famille libre a au plus n éléments, l'entier d est bien défini. Si $\{e_1, ..., e_d\}$ est une famille libre, elle est forcément libre maximale. Il suffit donc de démontrer le point suivant.

b) Si $\{e_1, ..., e_d\}$ est libre maximale alors $E = \langle e_1, ..., e_d \rangle$ car sinon il existe $v \in E \setminus \langle e_1, ..., e_d \rangle$ et alors $\{e_1, .., e_d, v\}$ serait libre *absurde !*

c) Si $\{e_1, .., e_d\}$ est génératrice minimale, alors $\{e_1, ..., e_d\}$ est libre car sinon il existe $t_1, ..., t_d$ non tous nuls tels que $t_1 e_1 + ... + t_d e_d = 0$. Supposons par exemple que $t_d \neq 0$. Alors $e_d = -t_1/t_d e_1 - ... - t_{d-1}/t_d e_{d-1} \in \langle e_1, ..., e_{d-1} \rangle \Rightarrow \langle e_1, ..., e_d \rangle = \langle e_1, ..., e_{d-1} \rangle$ *absurde !*

q.e.d.

Exemple : dans K^n une famille libre (*respectivement*génératrice) à n éléments est une base.

Définition 2 (dimension) *SI $E \leq K^n$, le cardinal commun à toutes les bases est la dimension de E, notée $\dim_K E$ ou $\dim E$.*

Exemple : $\dim K^n = n$.

Exercice 1 *Le sous-espace des matrices réelles symétriques de taille $n \times n$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Le sous-espace des matrices réelles antisymétriques de taille $n \times n$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Théorème 4.2 (de la base incomplète) *Soit $\{e_1, ..., e_q\}$ une famille génératrice de $E \leq K^n$. Supposons que $\{e_1, ..., e_p\}$ est libre pour un $p \leq q$. Alors il existe $\{1, ..., p\} \subseteq I \subseteq \{1, ..., q\}$ tel que la famille $\{e_i \ : \ i \in I\}$ est une base de E. On peut compléter la famille $\{e_1, ..., e_p\}$ avec des vecteurs de $\{e_1, ..., e_q\}$ pour obtenir une base de E.*

Démonstration : Soit I tel que $\{1, ..., p\} \subseteq I \subseteq \{1, ..., q\}$ et $\{e_i \ : \ i \in I\}$ est libre et $|I|$ maximal. Si $\langle e_i \ : \ i \in I \rangle < E$, soit $j \in \{1, ..., q\}$ tel que $j \notin I$. Alors $\{e_i \ : \ i \in I \cup \{j\}\}$ est encore libre : *contradiction !* *q.e.d.*

Corollaire 4.2.1 *Soit $E \leq K^n$ un sous-espace de dimension d. Alors si $e_1, ..., e_d \in E$, la famille $\{e_1, ..., e_d\}$ est libre $\Leftrightarrow$ la famille $\{e_1, ..., e_d\}$ est génératrice equi la famille $\{e_1, ..., e_d\}$ est une base.*