5 Sommes directes

Définition 1 *Soient* $E_1, ..., E_k \leq K^n$. *On dit que* $E_1, ..., E_n$ *sont en somme directe si* $x_1 + ... + x_n = 0$, $^\forall i, x_i \in E_i \Rightarrow {}^\forall i x_i = 0$.

Notation : $E_1 \oplus ... \oplus E_n$.

Proposition 5.1 $E \oplus F \Leftrightarrow E \cap F = 0$. $E_1 + ... + E_n = E_1 \oplus ... \oplus E_n \Leftrightarrow \sum_i \dim E_i = \dim(E_1 + ... + E_n)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E_1,..., soit $\mathcal{B}_k$ une base de E_k. Alors $\mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_k$ est une famille génératrice de $E_1 + ... + E_k$. Si $\dim(E_1 + ... + E_k) = \dim E_1 + ... + \dim E_k$, alors $\mathcal{B} \cup ... \cup \mathcal{B}_k$ est une famille génératrice minimale donc libre donc $x_1 + ... + x_k = 0$ avec $^\forall i$, $x_i \in E_i \Rightarrow {}^\forall i$, $x_i = 0$. *q.e.d.*

6 Espaces vectoriels *abstraits*

Définition 2 (espace vectoriel) Un espace vectoriel est un ensemble E avec une loi $+ : E \times E \to E$ et une multiplication *externe* $. : K \times E \to E$ telles que :

(i) + est asoociative ;

(ii) + est commutative ;

(iii) Il existe un neutre 0_E pour + ;

(iv) tout élément $x \in E$ admet un opposé noté $-x$;

(v) Distributivités : $^\forall \lambda \in K$, $qq x, y \in E$, $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$, $^\forall \lambda, \mu \in K$, $,^\forall x \in E$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;

(vi) $^\forall \lambda, \mu \in K$,
$,^\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$;

(vii) $^\forall x \in E$, $1.x = x$.

Remarque : si $\lambda \in K$ et $x \in E$, alors $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$.

Définition 3 *Si* E *est un* $K-$*espace vectoriel, on dit que* $F \subseteq E$ *est un sous-*$K-$*espace vectoriel de* E *si :*

i) $0 \in F$ *;*

ii) $^\forall x, y \in F$, $x + y \in F$ *;*

iii) $^\forall \lambda \in K$, $^\forall x \in E$, $\lambda x \in F$.

Notation $F \leq E$.

Exemples : K^n et ses sous-espaces, les sous-espaces d'un espace vectoriel, $K[X]$, $K_n[X]$ (espace des polynômes de degrè $\leq n$), les applications $E \to F$, si F espace vectoriel, les applications $E \to F$ linéaires si E, F espaces vectoriels, les espaces de matrices.

On peut définir familles génératrices, libres, bases.

Définition 4 *On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 6.1 *Tout espace vectoriel a une base. Dans un espace vectoriel, toutes les bases ont le même cardinal.*

Démonstration : En dimension finie : même démonstration que pour les sous-espaces de K^n. *q.e.d.*

Exemples : $\dim \mathscr{M}_{mn}(K) = mn$; $\dim K[X]$ dénombrable, $\dim K_n[X] = n + 1$, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2 (de base $1, i$), $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension non dénombrable.

7 Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(K)$. Soit r_L le rang des lignes de A *i.e.* la dimension du sous-espace de $\mathscr{M}_{1n}(K)$ engendré par les lignes. Soit r_C le rang des colonnes de A *i.e.* la dimension du sous-espace de $\mathscr{M}_{m1}(K)$ engendré par les colonnes.

Théorème 7.1 $r_L = r_C = \min\{k \geq 0 \,:\, ^\exists B \in \mathscr{M}_{mk}(K),\, C \in \mathscr{M}_{kn}(K),\, A = BC\}$

On note $\operatorname{rg} A := r_L(A) = r_C(A)$. *Démonstration :* Notons $L_1, ..., L_m$ les lignes de A. Soit $L_{i_1}, ..., L_{i_r}$ des lignes génératrices du sous-espace engendré par les L_i. Alors pour tout k,

$$L_k = \sum_{j=1}^{r} b_{kj} L_{i_j} \quad .$$

Alors $A = BC$ avec $B = (b_{kj})_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le j\le r}}$ et $C = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_r \end{pmatrix}$. Donc

$$r_L(A) \geq \min\{k \geq 0 \ : \ {}^{\exists} B \in \mathscr{M}_{mk}(K),\, C \in \mathscr{M}_{kn}(K),\, A = BC\} \ .$$

D'un autre côté, si $A = BC$ avec $B \in \mathscr{M}_{mk}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{kn}(K)$, alors pour tout i, $L_i(A) = \sum_{j=1}^{k} B_{ij}L_j(C) \in \langle L_1(C), ..., L_k(C)\rangle$. Donc $r_L(A) = \dim\langle L_1(A), ..., L_m(A)\rangle \leq k$. <u>*q.e.d.*</u>

Calcul pratique : si on multiplie A à gauche par une matrice inversible (forcément de taille m, on ne change pas le rang des lignes. Le rang est donc le nombre de pivots obtenus après avoir transformé A en une matrice échelonnée après un nombre fini d'opérations élémentaires.

Proposition 7.2 *Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(K)$ une matrice de rang r. Alors il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_m(K)$ et une matrice inversible $Q \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.*

Démonstration :

Exercice 1 *Indication : transformer A en une matrice échelonnée par des opérations élémentaires sur les lignes (d'où P) puis faire des opérations élémentaires sur les colonnes (d'où Q) ...* <u>*q.e.d.*</u>

8 Applications linéaires

Définition 5 *Soient E, F deux $K-$espaces vectoriels. Alors $f : E \to F$ est linéaire si*

i) ${}^{\forall}x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ *;*

ii) ${}^{\forall}x \in E,\ {}^{\forall}\lambda \in K,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exercice 2 *Si f est linéaire alors $f(0) = 0$.*

Exemples : dérivation, évaluation en un point, si $A \in \mathscr{M}_{mn}(K)$, alors

$$\mathscr{M}_{n1}(K) \to \mathscr{M}_{m1}(K),\ X \mapsto AX$$

est linéaire.

Propriétés : si f, g linéaires, $f+g$, λf, $f \circ g$ sont linéaires chqque fois que cela a un sens.

Définition 6 *Une application linéaire bijective est un isomorphisme. Sa réciproque est aussi linéaire.*

Exemple : la trace. *Exemple :* $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \to \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$.

Proposition 8.1 *Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors f isomorphisme $\Leftrightarrow$ f envoie une base sur une autre base. En particulier si f iso,* $\dim E = \dim F$.

Noyau image

Définition 7 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le noyau de f est le sous-espace* $\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\} \leq E$. *L'image de f est le sous-espace de F* $\mathrm{Imf} = \{f(x) : x \in E\} \leq F$.

Proposition 8.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, f injective $\Leftrightarrow$* $\ker f = 0$.

Démonstration : Si f est injective, $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$. Si $\ker f = 0$, si $f(x) = f(y)$, alors $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. *q.e.d.*