COURS DU MERCREDI 8/2/17

**Lemme 8.1 (HYPERIMPORTANT)** *Soit $E$ un $K-$espace vectoriel de dimension finie. Si $F \leq E$, alors* $\dim F \leq \dim E$. *Et on a :*

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E \ .$$

*Démonstration* : $\Rightarrow$: Soit $e_1, ..., e_n$ une base de $F$. C'est une famille libre dans $E$ et donc c'est une famille libre maximale car $n = \dim E$. C'est donc une base de $E$ et $F = \langle e_1, ..., e_n \rangle = E$. *q.e.d.*

**Proposition 8.2** *Si $F \leq E$, alors $F$ admet un supplémentaire* i.e. $^\exists G \leq E$, $F \oplus G = E$. *On a alors* $\dim G = \dim E - \dim F$ *(si $E$ de dimension finie).*

*Démonstration* : Soit $e_1, ..., e_m$ une base de $F$. On complète en une base $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_{m+p}$ une base de $E$. Alors, $G := \langle e_{m+1}, .., e_{m+p} \rangle$ convient. *q.e.d.*

**Définition 1** *Soit $f : E \to F$ linéaire. On note* $\mathrm{rg}\,(f)$ *la dimension de* $f(E) = \mathrm{Im} f$.

**Théorème 8.3 (du rang)** *Soit $f : E \to F$ une application linéaire où $E$ est de dimension finie. Alors*

$$\dim E = \mathrm{rg}\,(f) + \dim \ker f \ .$$

*Démonstration* : Soit $G \leq E$ tel que $\ker f \oplus G = E$. Alors la restriction $f : G \to F$ est injective donc $f : G \xrightarrow{\simeq} f(G)$ est un isomorphisme. Or $f(G) = f(E)$ donc $\dim G + \dim \ker f = \dim E \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(f) + \dim \ker f = \dim E$. *q.e.d.*

**Corollaire 8.3.1** *Soit $G$ un $K-$espace vectoriel.*
*Si $E, F \leq G$, alors* $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$.

*Démonstration* : Considérons $\phi : E \times F \to G$, $(x, y) \mapsto x + y$. Alors $\phi$ est linéaire, $\mathrm{Im}\phi = E + F$, $\ker \phi = \{(x, y) \in E \times F \ : \ x + y = 0\} = \{(x, -x) \ : x \in E \cap F\} \simeq E \cap F$. Donc d'après le théorème du rang appliqué à $\phi$, on a :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F = \dim \ker \phi + \mathrm{rg}\,\phi = \dim(E \cap F) + \dim(E + F) \ .$$

*q.e.d.*

**Exercice 1** *Montrer que* $\dim(E_1 + E_2 + E_3) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 - \dim E_1 \cap E_2 - \dim E_2 \cap E_3 - \dim E_1 \cap E_3 + \dim E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

## Matrice d'une application linéaire

Soit $E$ un espace vectoriel avec une base $e = (e_1, ..., e_n)$. Soit $F$ un espace vectoriel avec une base $f = (f_1, ..., f_m)$. Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire.

Alors si $1 \leq j \leq n$, $\phi(e_j) = a_{1j}f_1 + ... + a_{mj}f_m$ pour certains coefficients $a_{ij} \in K$.

**Définition 2** *On note $[\phi]_e^f := (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ la matrice de $\phi$ dans les bases $e$ et $f$. Si $E = F$ et si $e = f$, on note simplement $[\phi]_e$.*

*Exemple :* soit $E = K[X]_{\leq n}$. Dans la base $1, X, ..., X^n$ de $E$, la matrice de l'application linéaire $f : P(X) \mapsto P(X+1)$ est :

$$A = (C_{j-1}^{i-1})_{1\leq i,j\leq n+1}$$

(matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

*Propriétés :*

1) Soient $\phi : E \to F$, $\psi : F \to G$ des applications linéaires. Soient $e$ une base de $E$, $f$ une base de $F$, $g$une base de $G$. Alors on a :

$$[\psi \circ \phi]_e^g = \underbrace{[\psi]_f^g.[\phi]_e^f}_{\text{produit des matrices}} .$$

2) Soit $v \in E$ soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m$ tels que $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $f(v) = y_1f_1 + ... + y_mf_m$. Si $M = [\phi]_e^f \in \mathscr{M}_{mn}(K)$, alors $Y = MX$.

3) Si $\phi : E \to F$ est linéaire avec pour matrice $A$ dans certaines bases, alors $\operatorname{rg}\phi = \operatorname{rg} A$.

**Définition 3** *Soient $e = (e_1, ..., e_n)$ et $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases d'un $K-$espace vectoriel $E$. Alors pour tout $j$, $e'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}e_i$ pour certains coefficients $P_{ij} \in K$. La matrice $P_e^{e'} := (P_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de passage de la base $e$ dans la base $e'$.*

*Propriétés :*

1) $P_e^e = I_n$ ;

2) si $e, e', e"$ sont trois bases de $E$, alors $P_{e'}^{e''} P_e^{e'} = P_e^{e"}$ ;

3) $P_e^{e'}$ est inversible d'inverse $P_{e'}^{e}$ ;

4)

**Proposition 8.4 (formules de changement de bases)** *1) Soit $v \in E$ soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, soit $Y = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} \in K^m$ tels que $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_m e'_m$.*
*Soit $P = P_e^{e'} \in \mathscr{M}_n(K)$. Alors on a :*

$$X = PX' \ .$$

*2) Soit $\phi : E \to F$ un morphisme. Soient $e, e'$ et $f, f'$ deux bases de $E$ et deux bases de $F$. Soient $M := [\phi]_e^f$, $M' := [\phi]_{e'}^{f'}$, $P := P_e^{e'}$, $Q := P_f^{f'}$. Alors on a :*

$$M' = Q^{-1} M P \ .$$

*Démonstration :* 2) on a $Y = MX \Leftrightarrow QY' = MPX' \Leftrightarrow Y' = Q^{-1}MPX' = M'X'$ pour tous $X' \in K^n$. En particulier en prenant pour $X'$ les vecteurs de la base canoniques de $K^n$, on voit que les matrices $M' et Q^{-1}MP$ ont les mêmes colonnes donc $M' = Q^{-1}MP$. <u>*q.e.d.*</u>

*Remarque :* si $E = F$, si $e = f$, alors $M' = P^{-1}MP$.

*Exemple :* si $E = \mathbb{R}^2$, si $e = ((1,0),(0,1))$ et $e' = ((1,\delta),(1,\delta'))$, si $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y, x+y)$, on a :

$$M = [\phi]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ M' = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}, \ P = P_e^{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta' \end{pmatrix} \ .$$

Donc $\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta' \end{pmatrix}$.