COURS DU MARDI 14/2/17

Notations : si E, F sont des $K-$espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ les espaces vectoriels des applications linéaires $f : E \to F$ et des applications linéaires $f : E \to E$.

Exercice 1 *Si E, F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension* $\dim E. \dim F$.

Chapitre III les nombres réels

1 Lacunes de $\mathbb{Q}$

Exercice 2 *L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$* i.e. *: si $M \in \mathbb{Q}$ et si $^\forall x \in A$, $x \leq M$, alors on peut trouver $M' < M$ tel que $^\forall x \in A$, $x \leq M'$.*

Indication : si $p^2 > 2$, alors on peut poser $q = \frac{2p+2}{p+2} = p - \frac{p^2-2}{p+2} < p$ et $q^2 = 2 + 2\frac{p^2-2}{(p+2)^2} > 2$.

Exercice 3 *La suite $x_n = 1 + ... + \frac{1}{n!}$ est de Cauchy* i.e. *:*

$$^\forall \epsilon > 0, \, ^\exists N > 0, \, ^\forall m, n \geq N, \, |x_m - x_n| \leq \epsilon$$

mais n'admet pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

Indication : posons $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Alors $u_n \leq v_n$, $\lim_n (v_n - u_n) = 0$, (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, $u_n \leq v_n$ pour tout n et pourtant $\lim_n u_n$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$. En effet, si on note $e = \lim_n u_n$, si $e = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors on aurait :

$$0 < p/q - u_n < 1/n! \Rightarrow 0 < \underbrace{n!(p/q - 1 - ... - 1/n!)}_{\in \mathbb{Z}} < 1$$

absurde.

2 Corps totalement ordonné

Définition 1 *On dit qu'un corps K est totalement ordonné s'il existe une relation notée $<$ sur K telle que :*

i) $^\forall x, y \in K$, *une et une seule des relations suivantes est vérifiée :* $x < y$, $x = y$ *ou* $y < x$ *;*

ii) $^\forall x, y, z \in K$, $x < y < z \Rightarrow x < z$ *;*

iii) $^\forall x, y, z \in K$, $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ *;*

iv) $^\forall x, y \in K$, $^\forall z > 0$, $x < y \Rightarrow xz < yz$.

Définition 2 *On dit qu'un corps totalement ordonné* $(K, <)$ *est archimédien si :* $^\forall x, a \in K$, $a > 0 \Rightarrow {}^\exists n \in \mathbb{N}$, $x < na$.

Exercice 4 *Si* $(K, <)$ *est totalement ordonné alors pour tout* $0 \neq x \in K$, $0 < x$ *ou* $0 < -x$. *On a aussi* $1 > 0$ *et* $^\forall x \neq 0$, $x^2 > 0$.

Exemple : $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné archimédien pour la relation $<$ usuelle.

Contre-exemple : le corps des nombres complexes. En effet $^\exists i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1 < 0$.

Proposition 2.1 *Soit* K *un corps totalement ordonné. Alors* $\phi : \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto \underbrace{1 + ... + 1}_{n \text{ fois}}$ *est un morphisme d'anneaux*[*] *injectif. On pose alors* $Z := \phi(\mathbb{Z})$ *et* $Q := \{\phi(p)\phi(q)^{-1} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. *L'application :* $\mathbb{Q} \to Q$, $p/q \mapsto \phi(p)\phi(q)^{-1}$ *est bien définie et c'est une bijection.*

Exercice 5 *Si* K *est totalement ordonné, alors* K *est archimédien si et seulement si* Q *est dense dans* $\mathbb{R}$ i.e. *:* $^\forall x < y$ *dans* K, $^\exists r \in Q$, $x < r < y$.

Indication : $^\exists n \in \mathbb{N}^*$, $n(y - x) > 1$. *Soit* p *le plus petit entier tel que* $x < p/n$. *Alors* $(p-1)/n \leq x < p/n \Rightarrow << p/n \leq x + 1/n < y$.

3 Majorants, borne sup

Définition 3 *Majorants, borne sup Si* $A \subseteq K$, *un corps totalement ordonné, on dit que* M *est un majorant de* A *si :* $^\forall x \in A$, $x \leq M$. *On dit que* M *est un élément maximal de* A *si* $M \in A$ *et* $^\forall x \in A$, $x \leq M$. *On dit que* M *est une borne supérieure de* A *si* M *est le plus petit majorant de* A i.e. $^\forall x \in A$, $x \leq M$ *et si* $^\forall x \in A, x \leq M' \Rightarrow M \leq M'$. *Si elle existe , une borne sup est unique : notation* $\sup A$.

[*]. préserve l'addition, le produit et envoie 1 sur 1

On pourrait bien entendu définir aussi le minorant et la borne inférieure.

Exemple : Un élément maximal est une borne sup ! 0 est la borne sup de $\{-1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 6 *Si A est une partie finie non vide, alors A a un élément maximal.*

Démonstration : Par récurrence sur le cardinal de A *q.e.d.*

Exercice 7 *Si A est non vide, alors $M \in K$ est une borne sup de A si et seulement si M est un majorant de A et $^\forall \epsilon > 0$, $^\exists x \in A$, $M - \epsilon < x \leq M$.*

Si K est un corps totalement ordonné, on peut définir $|x| := \max\{x, -x\}$. bien entendu $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$.

4 Suites de Cauchy

Définition 4 *Soit K un corps totalement ordonné. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de K est de Cauchy si :*

$$^\forall \epsilon > 0, \, ^\exists N \geq 0, \, ^\forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < \epsilon \ .$$

Exemple : une suite convergente est de Cauchy.

On dit que K est *complet* si dans K toute suite de Cauchy converge.

Contre-exemple : dans $\mathbb{Q}$, la suite $1 + ... + 1/n!$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$!

Théorème 4.1 *Si K est un corps totalement ordonné, alors sont équivalentes :*

(i) *toute partie non vide de K a une borne sup ;*

(ii) *toute suite croissante majorée d'éléments de K converge dans K ;*

(iii) *K est archimédien et complet.*

Démonstration : $(i) \Rightarrow (ii)$: soit u_n une suite croissante majorée, alors posons $s = \sup\{u_n : n \geq 0\}$. On a $\lim_n u_n = s$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Soit u_n une suite de Cauchy. Alors u_n est bornée. En effet, il existe N_1 tel que $^\forall m, n \geq N_1$, $-1 < u_m - u_n < 1$. Mais alors :

$$^\forall n \geq 0, \, m := \min\{u_k - 1 : 0 \leq k \leq N_1\} < u_n < M := \max\{u_k + 1 : 0 \leq k \leq N_1\}.$$

Posons pour tout n, $b_n = \sup\{u_k \,:\, k \geq n\}$ et $a_n = \inf\{u_k \,:\, k \geq n\} := -\sup\{-u_k \,:\, k \geq n\}$.

La suite (a_n) est croissante majorée par M et la suite (b_n) est décroissante minorée par m (*i.e.* $(-b_n)$ est croissante majorée par $-m$).

Donc on peut noter $a = \lim_n a_n$ et $b = \lim_n b_n$ dans K. Comme la suite est de Cauchy :

$$^\forall \epsilon > 0,\ ^\exists N,\ ^\forall m, n \geq N,\ u_m < u_n + \epsilon$$

$$\Rightarrow {}^\forall m, n \geq N,\ b_m \leq u_n + \epsilon$$

$$\Rightarrow {}^\forall m, n \geq N,\ a_m \leq b_m \leq a_n + \epsilon$$

$$\Rightarrow a \leq b \leq a + \epsilon$$

C'est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $a = b$.

On a donc : $^\forall n$, $a_n \leq u_n \leq b_n \Rightarrow \lim_n u_n = a = b$.

Montrons que K est archimédien : soient $a, x \in K$ avec $a > 0$. La suite croissante (na) ne converge pas car $(n+1)a - na = a$ donc elle n'est pas majorée par x : $^\exists n \in \mathbb{N}$, $x < na$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Soit $\emptyset \neq A \subseteq K$ majoré. Alors pour tout $k \geq 0$, il existe n_k tel que $n_k/2^k \geq a$ pour tout $a \in A$ (car K archimédien). Choisissons n_k minimal pour cette propriété. Alors il existe $a \in A$ tel que $\frac{n_k - 1}{2^k} < a \leq \frac{n_k}{2^k}$. Considérons $x_k := \frac{n_k}{2^k}$. Pour tout k, on a :

$$x_{k+1} \leq x_k = \frac{2n_k}{2^{k+1}} \ .$$

Pour tout k, il existe $a \in A$ tel que $x_k - 2^{-k} < a$ donc $x_k - 2^{-k} \leq x_{k+1} \leq x_k$. La suite x_k est donc de Cauchy car si $\epsilon > 0$, $|x_{k+l} - x_k| \leq 2^{-k} + \ldots + 2^{-k-l+1} \leq 2^{-k+1} \leq \epsilon$ pour k assez grand. Soit x sa limite. On a $^\forall a \in A$, $a \leq x$ et si $\epsilon > 0$, il existe k tel que $2^{-k} < \epsilon \Rightarrow {}^\exists a \in A$, $x - \epsilon \leq x_k - 2^{-k} < a$. Donc x est une borne sup de A.

q.e.d.

Exercice 8 *Si K est un corps totalement ordonné complet, alors si $y \in K$, $y \geq 0 \Leftrightarrow {}^\exists x \in K$, $y = x^2$. Indication : poser $x = \sup\{t \in K \,:\, t^2 < x\}$.*

Exercice 9 *Si K, K' sont des corps totalement ordonnés complets, alors il existe un unique isomorphisme de corps $\phi : K \xrightarrow{\simeq} K'$.*

5 Constructions de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$