

Définition. Soient E, F deux K -espaces vectoriels. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est *linéaire* ou que f est un *morphisme*, si

- ① $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$ ET
- ② $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme*.

Homothéties. Pour tout $\lambda \in K$, l'application $E \rightarrow E$, $x \mapsto \lambda x$ est linéaire. C'est l'homothétie de rapport λ . *Notation :* λId_E .

$$K[X] \rightarrow K[X], P(X) \mapsto P'(X)$$

$$K[X] \rightarrow K, P \mapsto P(0)$$

$$\mathcal{M}_n(K) \rightarrow K, M \mapsto \text{Tr}M$$

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$, alors

$$\mathcal{M}_{n1}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{m1}(K), X \mapsto AX$$

est linéaire.

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$$

ne sont pas linéaires.

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$$

n'est pas \mathbb{C} -linéaire.

Exercice. Si f est linéaire alors $f(0) = 0$.

Proposition. Une application $f : K^n \rightarrow K$ est linéaire si et seulement s'il existe certains coefficients $a_1, \dots, a_n \in K$ tels que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in K, f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n .$$

Propriétés. Soit $\lambda \in K$. Si f, g sont des applications linéaires, alors

$$f + g, \lambda f, f \circ g$$

sont linéaires (*chaque fois que cela a un sens*).

Notation. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \rightarrow F$. **Exercice.** $\mathcal{L}(E, F)$ est un K -espace vectoriel de dimension $\dim E \dim F$.

Soient E, F deux espaces vectoriels. Soit e_1, \dots, e_n une base de E .
Soient $v_1, \dots, v_n \in F$, alors il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour tout i .
C'est l'application définie par :

$$f(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n .$$

Définition Une application linéaire bijective est un isomorphisme.

Remarque. si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi linéaire.

Notation. $E \simeq F$.

Exemple.

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(a, b) \mapsto a + ib$$

est un isomorphisme.

D'inverse :

$$(\operatorname{re}(z), \operatorname{im}(z)) \longleftarrow z \quad .$$

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. Alors :
 f isomorphisme $\Leftrightarrow f$ envoie une base de E sur une base de F .

En particulier si f isomorphisme, $\dim E = \dim F$.

Remarque. En particulier, si $m \neq n$, $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$.

Exercice. Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

- a) Si f est injective, alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F .
- b) Si f est surjective, alors l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F .
- c) Si f est bijective, alors l'image par f d'une base de E est une base de F .

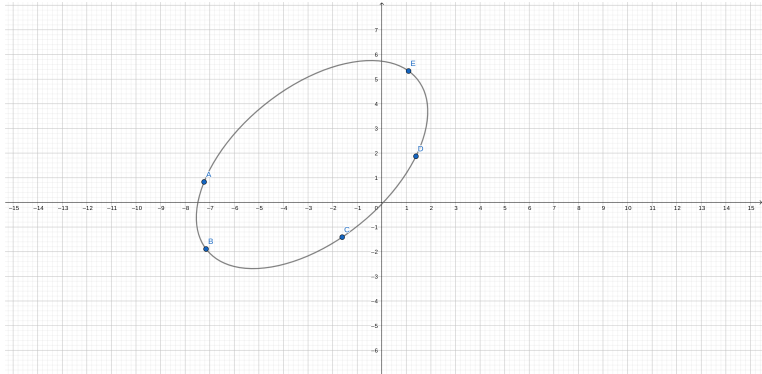
Exercice (suite). En particulier, si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors f injective $\Rightarrow \dim E \leq \dim F$ et f est surjective $\Rightarrow \dim E \geq \dim F$.

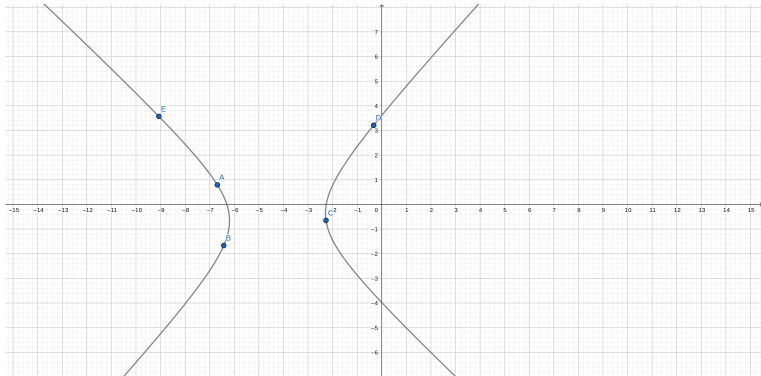
Exemples. Soient $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2), D(x_3, y_3), E(x_4, y_4)$ cinq points du plan \mathbb{R}^2 . L'application $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^5, (a, b, c, d, e, f) \mapsto (F_{abcdef}(x_0, y_0), F_{abcdef}(x_1, y_1), F_{abcdef}(x_2, y_2), F_{abcdef}(x_3, y_3), F_{abcdef}(x_4, y_4))$ est linéaire non injective ! (où

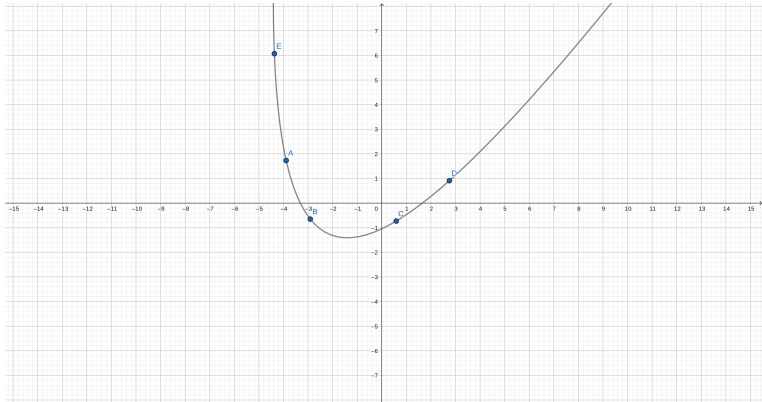
$$F_{abcdef}(X, Y) = aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f).$$

Donc il existe toujours (au moins) une conique \mathcal{C} qui passe par cinq points du plan quelconques. *Une conique est une courbe d'équation*

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ où } a, b, c, d, e, f \text{ sont des réels non tous nuls.}$$







Définition. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, on pose

$$\text{Ker}f = f^{-1}(0) = \{x \in E : f(x) = 0\},$$

c'est le *noyau* de f
et

$$\text{Im}f := f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\},$$

c'est l'image de f .

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E et de F , *respectivement*.

Plus généralement,
si $F_1 \leq F$, alors $f^{-1}(F_1) \leq E$
et si $E_1 \leq E$, alors $f(E_1) \leq F$.

Définition. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, on pose $\text{rang} f = \dim \text{Im} f$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. **Proposition.** f injective $\Leftrightarrow \ker f = 0$.

Théorème du rang. $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$

Démonstration. Soit $G \leq E$ tel que $\ker f \oplus G = E$. Alors la restriction $f : G \rightarrow F, x \mapsto f(x)$ est injective donc $f : G \xrightarrow{\cong} f(G)$ est un isomorphisme.

Or $f(G) = f(E)$ donc

$$\dim G + \dim \ker f = \dim E \Leftrightarrow \dim f(G) + \dim \ker f = \dim E$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) + \dim \ker f = \dim E .$$

Corollaire. Formule de Grassmann. Si $E_1, E_2 \leq E$, alors
 $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Proposition. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, si $\dim E = \dim F$ est finie,
ALORS :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Contre-exemples.

- a) $K[X] \rightarrow K[X], P \mapsto P'$ est surjective mais non injective.
- b) $K[X] \rightarrow K[X], P \mapsto XP$ est injective non surjective.

Soient $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes 2 à 2 distincts.

Proposition. L'application :

$\mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ est un isomorphisme.

$P(X) \longmapsto (P(z_0), \dots, P(z_n))$

Proposition. L'application : $\mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$P(X) \longmapsto P(X + 1) - P(X)$$

est surjective.

Par exemple, $\frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = P(X + 1) - P(X)$ avec $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_i}{i!} \frac{X^{n-i}}{(n-i)!}$.

Soit $\mathcal{F} = \{(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\}$.

Proposition. L'application

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(f_n) \longmapsto (f_0, f_1)$$

est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{E} = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : y'' + y = 0\}$.

Proposition. L'application

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y \longmapsto (y(0), y'(0))$$

est un isomorphisme.

Soit $F : E \rightarrow E$ linéaire.

Définition. On dit que f est une projection (ou un projecteur) si $f^2 = f$.

Exemple. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (4x - 2y, 6x - 3y)$
est une projection sur la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$ parallèlement à
la droite d'équation $y = 2x$.

Proposition. Si f est un projecteur, alors $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

Exemples. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{r_\theta} \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto ((\cos \theta)x - (\sin \theta)y, (\sin \theta)x + (\cos \theta)y)$$

rotation (de centre 0 d'angle θ)

Exemples. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{s_\theta} \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto ((\cos \theta)x + (\sin \theta)y, (\sin \theta)x - (\cos \theta)y)$$

symétrie (orthogonale) d'axe Δ_θ .

Exercice.

$$s_{\theta}^2 = r_{\theta}.$$