Soient f, g deux fonctions dérivables.

Proposition. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} g(x) = 0$, ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} g(x) = \infty$, ALORS si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Remarque : **c'est aussi vrai si** $a = \pm\infty$.

Exemples. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos x}{1+\tan^2 x} = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x}{\frac{1}{1+x}} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos x - 1}{\tan^2 x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{-\sin x}{2\tan x(1+\tan^2 x)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Démonstration. On utilise la **formule des accroissements finis généralisée :**
Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, alors il existe $a < c < b$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

Définition. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, s'il existe un intervalle ouvert $x_0 \in J \subseteq I$ et une fonction $\epsilon : J \to \mathbb{R}$ telle que $^\forall x_0 \neq x \in J$, $f(x) = \epsilon(x)g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \epsilon(x) = 0$.

Notation $f = o_{x_0}(g)$. Si $f - h = o_{x_0}(g)$, on notera simplement : $f = h + o_{x_0}(g)$.

Exemples

a) $f = o_{x_0}(1)$ signifie $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f = 0$.

b) Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$,
$f = o_{x_0}(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 0$.

c) $x^2 = o_0(x)$.

d) $x = o_{+\infty} x^2$.

Propriétés. Soient f_1, f_2, g, h définies sur I.

- Si $f_1 = o_{x_0}(g)$, si $f_2 = o_{x_0}(g)$, alors $f_1 + \lambda f_2 = o_{x_0}(g)$ $(^\forall \lambda \in \mathbb{R})$.
- Si $f = o_{x_0}(g)$, alors $fh = o_{x_0}(gh)$.

Exercice.

$$^{\forall} n \in \mathbb{N},\ a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_0 + o_0(1)$$

$$= a_n x^n + o_{+\infty}(x^n)\ .$$

Définition. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de x_0 si $f = g + o_{x_0}(g)$.
Notation : $f \sim_{x_0} g$.

- Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$,
  $f = \sim_{x_0}(g) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f}{g} = 1$.
- $\sin x \sim_0 x$.
- $\tan x \sim_0 x$.
- $x \sim_{+\infty} x + 1$.

Propriétés.

- Si $f \sim_{x_0} g$, alors $g \sim_{x_0} f$.
- $f \sim_{x_0} f$.
- Si $f \sim_{x_0} g$ et $g \sim_{x_0} h$, alors $f \sim_{x_0} h$.
- Si $f_1 \sim_{x_0} g_1$, si $f_2 \sim_{x_0} g_2$, alors $f_1 f_2 \sim_{x_0} g_1 g_2$.
- $f \sim g \Rightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$ $(^\forall \alpha \in \mathbb{N})$ ou $(^\forall \alpha \in \mathbb{R})$ si f, g sont > 0.

Définition. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de x_0, s'il existe un intervalle ouvert $x_0 \in J \subseteq I$ et une fonction **bornée** $\epsilon : J \to \mathbb{R}$ telle que ${}^{\forall} x_0 \neq x \in J,\ f(x) = \epsilon(x) g(x)$.
Notation $f = O_{x_0}(g)$ ou bien $f = O(g)$ « au voisinage de x_0 ».

Exemples :

- $f = O_{x_0}(1)$ signifie « f bornée ».
- Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$, $f = O_{x_0}(g)$ signifie $\frac{f}{g}$ bornée sur $I \setminus \{x_0\}$.
- $x \sin x = O_{+\infty}(x)$.

Propriétés. Soient f_1, f_2, g, h définies sur I.

- Si $f_1 = O_{x_0}(g)$, si $f_2 = O_{x_0}(g)$, alors $f_1 + \lambda f_2 = O_{x_0}(g)$ $(^\forall \lambda \in \mathbb{R})$.
- Si $f = O_{x_0}(g)$, alors $fh = O_{x_0}(gh)$.
- $f = o_{x_0}(g) \Rightarrow f = O_{x_0}(g)$.
- Si $f = o_{x_0}(g)$ et si $g = O_{x_0}(h)$,alors $f = o_{x_0}(h)$.

Soit I un intervalle ouvert contenant $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un *développement limité*, en abrégé *d.l.*,d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \ .$$

Exemples À l'ordre 1 en 0 :

- $e^x = 1 + x + o(x)$.
- $\tan x = x + o(x)$.
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$.
- $\ln(1+x) = x + o(x)$.

Proposition. Si $f = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$ si et seulement si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$.

Unicité

Théorème. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 alors les a_i sont uniques.

Démonstration. Si
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$, alors :

$$a_0 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$$

$$a_1 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0}$$

etc

$$a_n = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - ... - a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^n}$$

Parité. Soit $a > 0$ et soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction avec un d.l. d'odre n en 0 : $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$. Si f est paire les a_{2k+1} sont nuls ; si f impaire, les a_{2k} sont nuls.

Exemples :

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- $\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Contre-exemple

Exercice. La fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$, a un d.l d'ordre 2 en 0 mais $f''(0)$ n'existe pas.

Formule de Taylor-Young

Théorème. Si f est $n-$fois dérivable en x_0,alors

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+o((x-x_0)^n)\,.$$

Exemple. Au voisinage de 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ .$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \geq 0$. Si $n = 0$, c'est facile.

On suppose que c'est vrai *pour les fonctions* $n-1$ *fois dérivables* , $n \geq 1$ ... Par hyptohèse de récurrence appliquée à f', on a :

$$f'(x) = f'(x_0) + ... + \frac{(f')^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})$$

$$= f'(x_0) + ... + \frac{f^{n}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}) \ .$$

Posons $F = f(x) - f(x_0) - ... - \frac{(f)^n(x_0)}{(n)!}(x-x_0)^n$ et $G = (x-x_0)^n$.Comme $\lim_{x\to x_0} F = \lim_{x\to x_0} G = 0$, d'après la règle de L'Hospital, on a :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F}{G} = \lim_{x\to x_0} \frac{F'}{G'} = 0$$

car

$$\frac{F'}{G'} = \frac{f'(x) - f'(x_0) + \ldots + \frac{(f)^n(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$= \frac{o((x-x_0)^{n-1})}{n(x-x_0)^{n-1}} = o(1) \ .$$

Q.e.d.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\binom{\alpha}{n}}x^n+o(x^n)$$

Par exemple si $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Somme

Si $f = P_n(x) + o(x^n)$ et $g = Q_n(x) + o(x^n)$ où $P_n, Q_n \in \mathbb{R}_{\leq n}[X]$, alors $f + g = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$.

Produit

Si $f = F_n(x) + o(x^n)$ et $g = G_n(x) + o(x^n)$ où $F_n, G_n \in \mathbb{R}_{\leq n}[X]$, alors $fg = R_n(x) + o(x^n)$ où $R_n(x)$ est le *reste* de la division de F_nG_n par X^{n+1} : $F_nG_n = R_n \mathrm{mod} X^{n+1}$.

Division

Si $f = F_n(x) + o(x^n)$ et $g = G_n(x) + o(x^n)$ où $F_n, G_n \in \mathbb{R}_{\leq n}[X]$, ET SI $g(0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g} = Q_n(x) + o(x^n)$ où Q_n est le quotient de la division de P_n par Q_n « *selon les puissances croissantes* » modulo X^{n+1}.

Exemples.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

Exemples

$$e^{\sin x} = 1 + (\sin x) + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + o(\sin^3 x)$$

$$= 1 + (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Exemples

$$\ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))$$

$$= (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) - \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2}{2} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Théorème. Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Soit J un intervalle ouvert. Soient $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ telles que $g(I) \subseteq J$. On suppose que f a un développement à l'ordre n en $g(0)$, que g a un développement à l'ordre n en 0 :

$$g = g(0) + Q_n(x) + o(x^n)$$

$$f(g(0) + q) = P_n(q) + o(q^n)$$

où P_n, Q_n sont des polynômes de degrés $\leq n$ et $X|Q_n$, alors $f \circ g$ a un développement limité à l'ordre n en 0 et :

$$f \circ g(x) = R_n + o(x^n)$$

où $P_n \circ Q_n = R_n \mathrm{mod} X^{n+1}$ (R_n est le reste de la division euclidienne de $P_n \circ Q_n$ par X^{n+1}).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, intervalle ouvert contenant 0. *Théorème.* Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, si f' a un d.l. en 0 d'ordre n :

$$f'(x) = a_0 + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$(n \geq 0)$ alors f a un d.l. à l'ordre $n + 1$ en 0 :

$$f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + ... + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}) .$$

Démonstration. D'après la règle de l'Hospital,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)-a_0x-....-\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}}{x^{n+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - a_0 - \ldots - a_n x^n}{(n+1)x^n}$$

si cette limite existe. Or cette limite existe et vaut 0. **<u>Q.e.d.</u>**

Exemples

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \ .$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \ .$$

Exercices. Les coefficients du d. l. de $\tan(x)$ sont ≥ 0. Les coefficients de $\frac{1}{\cos x}$ aussi.

Contre-exemple

Exercice. La fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$ a un *dl* d'ordre 2 en 0 mais f' n'a pas de *dl* à l'ordre 1 en 0.

Pour trouver le dl de f en x_0, on pose $x = x_0 + h$ et on cherche le dl en 0 de la fonction

$$h \mapsto f(x_0 + h) = \ldots$$

Exemples

$$e^x = e^{2+(x-2)} = e^2(1+(x-2)+(x-2)^2/2+(x-2)^3/6+o((x-2)^3))$$

$$= e^2 + e^2(x-2) + e^2(x-2)^2/2 + e^2(x-2)^3/6 + o((x-2)^3)$$

Exemples

$$\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$$

Exemple : « au voisinage de l'∞ » ,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}-1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{8x^2\sqrt{x}}+o(\frac{1}{x^2\sqrt{x}})\ .$$

Définition. $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + ... + \frac{B_n}{n!}x^n + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\tfrac{1}{2},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\tfrac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \tfrac{1}{42},\ \text{etc}$$

Exercices. $B_n = 0$ si n impair > 1. $(-1)^{n-1}B_{2n} > 0$ si $n > 0$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k = \frac{1}{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \right) \quad .$$

$$\tan x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} + o(x^{2n-1})$$

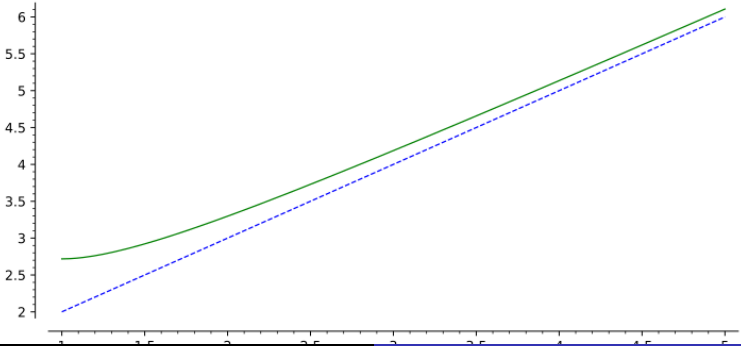
Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.
Définition. On dit que le graphe de f a une asymptote à l'infini d'équation $y = ax + b$ si
$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax - b = 0$.

Exemple.

Figure – *

$$y = xe^{\frac{1}{x}}$$

asymptote $y = x + 1$



Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de : $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Donner le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{6}$ de : $\ln(2\sin x)$

Calculer : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \mathrm{argth} x}{\mathrm{sh} x - \arcsin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x \mathrm{th} x} - \frac{1}{x \tan x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$$

Calculer : $\lim_{x \to +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

Réponse. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{x(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))}$
$= e^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}$. Donc $e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$
$e(1-e^{-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}) = \frac{e}{2x}+o(\frac{1}{x})$. Donc
$\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{e}{2x}+o(\frac{1}{x}))}$
$= e^{\frac{1}{x}(\ln(\frac{1}{x})+\ln(\frac{e}{2}+o(1))} = e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{1}{x})+o(1)} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} e$.