Si $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, alors on pose
$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
On notera 0 le vecteur $(0, \ldots, 0)$.

Propriétés. Pour tous $x, y \in \mathbb{K}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

a) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
b) $1x = x$;
c) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
d) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
e) $0x = 0$.

Définition. On dit que $E \subseteq \mathbb{K}^n$ est un sous-$\mathbb{K}-$espace de $\mathbb{K}^n$ si $0 \in E$,si $^\forall x, y \in E, x + y \in E$ et si $^\forall x \in E$, $^\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in E$.
Notation. $E \leq \mathbb{K}^n$.

Plus généralement, si $F \subseteq E$ est aussi un sous-$\mathbb{K}-$espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$,on notera $E \leq F$.

Exemples. $\{0\}$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
Si $v \in \mathbb{K}^n$, alors $\mathbb{K}v = \{\lambda v \ : \ \lambda \in \mathbb{K}\} \leq \mathbb{K}^n$.
$\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \ : \ x + y + z = 0\} \leq \mathbb{K}^3$.

Intersection. Si $E, F \leq \mathbb{K}^n$, alors $E \cap F$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
Somme. Si $E, F \leq \mathbb{K}^n$, alors $E + F = \{x + y \ : \ x \in E,\ y \in F\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Attention ! Si $E, F \leq \mathbb{K}^n$, alors $E \cup F$ n'est pas un sous-espace vectoriel sauf si $E \leq F$ ou $F \leq E$.

Définition : sous-espace engendré. Soient $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$, on note $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$ le plus petit sous-espace de $\mathbb{K}^n$ contenant $v_1, \ldots, v_k$.
On a :

$$\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \ : \ \lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}\} \ .$$

Notation : $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\} = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \mathbb{K} v_1 + \ldots + \mathbb{K} v_k$.

Exemple. $\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \ : \ 2x+3y+z=0\} = \{(x,y,-2x-3y) \ : \ x,y \in \mathbb{K}\} = \{x(1,0,-2)+y(0,1,-3) \ : \ x,y \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}(1,0,-2)+\mathbb{K}(0,1,-3) = \mathrm{Vect}\{1,0,-2),(0,1,-3)\}$; c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

Définition. Si $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{K}^n$, on dit que la famille $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est *libre* ou $\mathbb{K}-$*linéairement indépendante* si pour tous $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$, on a :

$$t_1 e_1 + \ldots + t_k e_k = 0 \Rightarrow t_1 = \ldots = t_k = 0\,;$$

sinon on dit que la famille est *liée*

Exemples. Les vecteurs $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,0)$ sont libres. Les vecteurs $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$ sont liés.

Définition. Soit $E \leq \mathbb{K}^n$. Soient $e_1, .., e_k \in E$.On dit que la famille $\{e_1, ..., e_k\}$ est *génératrice* (ou qu'elle engendre E) si $E = \langle e_1, ..., e_k \rangle$.

Exemples. Les vecteurs $(1,2,3),(4,5,6)$ engendrent $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+z=2y\}$.

Définition. Une base est une famille libre et génératrice.

Exemples. Soient $e_i := \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n = \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$; c'est la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; : \; x+y+z=0 \right\}.$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base du sous-espace des matrices de trace nulle.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base du sous-espace des matrices 2×2 réelles symétriques.

Proposition. i) Soit $e \in \mathbb{K}^n$. Alors $\{e\}$ libre $\Leftrightarrow$ $e \neq 0$.

ii) Si $e_1, e_2 \in \mathbb{K}^n$, alors $\{e_1, e_2\}$ est libre $\Leftrightarrow$ e_1, e_2 non colinéaires
i.e. $e_1 \notin \mathbb{K}e_2$ et $e_2 \notin \mathbb{K}e_1$.

iii) Si $e_1, ..., e_k \in \mathbb{K}^n$, alors $\{e_1, ..., e_k\}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\{e_1, ..., e_{k-1}\}$ libre et $e_k \notin \mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$.

Démonstration de iii) : $\Rightarrow$: $e_k = t_1 e_1 + \ldots + t_{k-1} e_{k-1} \Rightarrow$ $t_1 e_1 + \ldots + t_{k-1} e_{k-1} - 1.e_k = 0$ absurde. $\Leftarrow$: si $t_1 e_1 + \ldots + t_k e_k = 0$, alors $t_k = 0$ sinon $e_k = -t_1/t_k e_1 - \ldots - t_{k-1}/t_k e_{k-1} \in \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle$.Mais alors $t_1 = \ldots = t_{k-1} = 0$ car $\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ est libre.

Proposition. Si $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$, si $m < n$, alors les colonnes de M sont liées.

Démonstration. Quitte à multiplier A par une matrice inversible P, on peut supposer A échelonnée. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Notons $a_{1k_1}, ..., a_{rk_r} \neq 0$ les « pivots » de A. Où : $1 \leq k_1 < ... < k_r \leq m$.

Notons $J = \{1, ..., n\} \setminus \{k_1, ..., k_r\}$. Alors $J \neq \emptyset$. Soit j_{max} le maximum de J. On pose $x_{j_{max}} = 1$ et $x_j = 0$ si $j \in J$, $j < j_{max}$.

Puis on définit par récurrence descendante
$x_{k_r} = -\frac{1}{a_{r,k_r}}(\sum_{j>k_r} a_{rj}x_j)$,
$x_{k_{r-1}} = -\frac{1}{a_{r-1,k_{r-1}}}(\sum_{j>k_{r-1}} a_{r-1,j}x_j)$, ...,
$x_{k_1} = -\frac{1}{a_{1,k_1}}(\sum_{j>k_1} a_{1j}x_j)$.

On a bien : $^\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ et au moins un $x_j \neq 0$ $(x_{j_{max}})$. **Q.e.d.**

Corollaire. Si $E \leq \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $e_1, \ldots, e_q$, si $f_1, \ldots, f_p$ est une famille libre de vecteurs de E, alors $p \leq q$.

Démonstration. Pour tout j, $f_j = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} e_i$. Si $p > q$, alors il existe $x_1, ..., x_p$ **non tous nuls** tel que $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = 0$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Mais alors :

$$0 = \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j) e_i$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j (\sum_{i=1}^{q} a_{ij} e_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j f_j$$

absurde car les f_j sont indépendants.

Corollaire. Toutes les bases ont le même cardinal.

Démonstration. Soit $E \leq \mathbb{K}^n$. Si $\{e_1, ..., e_k\}$ et $\{e'_1, ..., e'_{k'}\}$ sont des bases de E, alors $\{e_1, ..., e_k\}$ est libre et $\{e'_1, ..., e'_{k'}\}$ génératrice donc $k \leq k'$. Mais comme $\{e'_1, ..., e'_{k'}\}$ est libre et $\{e_1, ..., e_k\}$ génératrice, on a aussi $k \geq k'$.

Soit $e \leq \mathbb{K}^n$.

Corollaire. i) Le sous-espace E admet au moins une base.

ii) Une famille libre maximale dans E est une base. *Libre maximale signifie que si on ajoute un vecteur de E, on obtient une famille liée.*

iii) Une famille génératrice minimale de E est une base. *génératrice minimale signifie que si on retire un vecteur de la famille, on obtient une famille qui n'est plus génératrice.*

Exemple : dans $\mathbb{K}^n$ une famille libre (*respectivement* génératrice) à n éléments est une base.

Définition. SI $E \leq \mathbb{K}^n$, le cardinal commun à toutes les bases est la **dimension de** E, notée $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.

Exemples. $\dim \mathbb{K}^n = n$,$\dim \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) = mn$, le sous-espace des matrices réelles symétriques de taille $n \times n$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, le sous-espace des matrices réelles antisymétriques de taille $n \times n$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Théorème. i) Soit $E \leq \mathbb{K}^n$. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E. Alors on peut compléter en une base de E : $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_d)$.

ii)Soit $(e_1, ...e_q)$ une famille génératrice de E. Alors on peut trouver $I \subseteq \{1, ..., q\}$ telle que $(e_i \ : \ i \in I)$ est une base de E.

iii) Soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une famille génératrice de $E \leq \mathbb{K}^n$. Supposons que $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre pour un $p \leq q$.Alors il existe $\{1, \ldots, p\} \subseteq I \subseteq \{1, \ldots, q\}$ tel que la famille $\{e_i \ : \ i \in I\}$ est une base de E.

Corollaire. Soit $E \leq \mathbb{K}^n$ un sous-espace de dimension d.Alors si $e_1, ..., e_d \in E$,
la famille $\{e_1, ..., e_d\}$ est libre $\Leftrightarrow$ la famille $\{e_1, ..., e_d\}$ est génératrice$\Leftrightarrow$ la famille $\{e_1, ..., e_d\}$ est une base.

Corollaire. Soit $F \leq E \leq \mathbb{K}^n$. Alors $\dim F \leq \dim E$ et $F = E \Leftrightarrow \dim F = \dim E$

Théorème. Si $E, F \leq \mathbb{K}^n$, alors

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) \ .$$

Démonstration. Soit $(u_1, ..., u_d)$ une base de $E \cap F$. On complète en $(u_1, ..., u_d, v_1, .., v_e)$ une base de E et $(u_1, ..., u_d, w_1, ..., w_f)$ une base de F. C'est possible car $E \cap F \leq E, F$. On a $e, f \geq 0$, $\dim E = d + e$, $\dim F = d + f$. Alors $(u_1, ..., u_d, v_1, ..., v_e, w_1, ..., w_f)$ est une base de $E + F$.

En effet, $E, F \leq \mathrm{Vect}\{u_1, ..., u_d, v_1, ..., v_e, w_1, ..., w_f\}$ donc $E + F = \mathrm{Vect}\{u_1, ..., u_d, v_1, ..., v_e, w_1, ..., w_f\}$ et la famille $(u_1, ..., u_d, v_1, ..., v_e, w_1, ..., w_f)$ est génératrice pour $E + F$.

C'est aussi une famille libre car :

$$x_1 u_1 + \ldots + x_d u_d + y_1 v_1 + \ldots + y_e v_e + z_1 w_1 + \ldots + z_f w_f = 0$$

$$\Rightarrow x_1 u_1 + \ldots + x_d u_d + y_1 v_1 + \ldots + y_e v_e = -z_1 w_1 - \ldots - z_f w_f \in E \cap F$$

$$\Rightarrow x_1 u_1 + \ldots + x_d u_d + y_1 v_1 + \ldots + y_e v_e = t_1 u_1 + \ldots + t_d u_d$$

pour certains $t_i \in \mathbb{K}$. Donc

$$(x_1 - t_1) u_1 + \ldots + (x_d - t_d) u_d + y_1 v_1 + \ldots + y_e v_e = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = \ldots = y_e = 0 \ .$$

De même

$$x_1 u_1 + \ldots + x_d u_d + z_1 w_1 + \ldots + z_f w_f = -y_1 v_1 - \ldots - y_e w_e \in E \cap F$$

$$\Rightarrow z_1 = \ldots = z_f = 0 \ .$$

Donc $x_1 u_1 + \ldots + x_d u_d = 0$ et $x_1 = \ldots = x_d = 0$.
Par conséquent, la famille $(u_1, \ldots., u_d, v_1, \ldots, v_e, w_1, \ldots, w_f)$ est libre.
On vérifie enfin que $\dim(E + F) = d + e + f =$
$(d + e) + (d + f) - d = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$.

Définition. Soient $E, F \leq \mathbb{K}^n$. On dit que E, F sont en *en somme directe* si $E \cap F = 0$ notation : $E \oplus F = E + F$.

Si $E \oplus F = \mathbb{K}^n$, on dit que F est un supplémentaire de E dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{Antisym}_n(\mathbb{K})$

Théorème.

Soit $E \leq \mathbb{K}^n$ un sous-$\mathbb{K}-$espace vectoriel. Alors il existe des sous-espaces F supplémentaires de E dans $\mathbb{K}^n$: $E \oplus F = \mathbb{K}^n$. Un tel supplémentaire vérifie $\dim F = n - \dim E$.

Proposition. Si $E, F \leq \mathbb{K}^n$, alors E, F sont en somme directe $\Leftrightarrow$ $E \cap F = 0 \Leftrightarrow \dim(E + F) = \dim E + \dim F$.

Définition. Soient $E_1, ..., E_k \leq \mathbb{K}^n$. On dit que $E_1, ..., E_n$ sont en somme directe si $x_1 + ... + x_n = 0, \ ^\forall i, x_i \in E_i \Rightarrow {}^\forall i x_i = 0$.
Notation : $E_1 \oplus ... \oplus E_n$.

Proposition.
$E_1 + ... + E_n = E_1 \oplus ... \oplus E_n \Leftrightarrow \sum_i \dim E_i = \dim(E_1 + ... + E_n)$

Définition. Un $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* est un ensemble E avec une loi $+ : E \times E \to E$ et une multiplication *externe* $. : \mathbb{K} \times E \to E$ telles que

i) $+$ est associative ;
ii) $+$ est commutative ;

iii) Il existe un neutre 0_E pour $+$;
iv) tout élément $x \in E$ admet un opposé noté $-x$;

v) $^\forall\lambda, \mu \in \mathbb{K}, , ^\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$;
vi) $^\forall x \in E$, $1.x = x$.

vii) (Distributivités) ${}^\forall\lambda \in \mathbb{K}$, ${}^\forall x, y \in E$, $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$,
${}^\forall\lambda, \mu \in \mathbb{K}, , {}^\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$;

Remarque. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, alors $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$.

Définition. Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, on dit que $F \subseteq E$ est un sous-$\mathbb{K}-$espace vectoriel de E si :

i) $0 \in F$;
ii) $^\forall x, y \in F$, $x + y \in F$;
iii) $^\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $^\forall x \in E$, $\lambda x \in F$.

Notation $F \leq E$.

Exemples : $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces,les sous-espaces d'un espace vectoriel,$\mathbb{K}[X]$,$\mathbb{K}_n[X]$ (espace des polynômes de degré $\leq n$),les applications $E \to F$, si F espace vectoriel, les applications $E \to F$ linéaires si E, F espaces vectoriels, les espaces de matrices, l'ensemble des suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel, les fractions rationnelles à coefficients réels : $\mathbb{R}(X)$, l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition. Une intersection de sous-espaces est un sous-espace.

On peut définir familles génératrices,libres, bases comme pour les sous-espaces de $\mathbb{K}^n$.

Définition. Soit E un espace vectoriel. Si $F, G \leq E$, on note $F + G = \{u + v \ : \ u \in F, v \in G\}$: c'est un sous-espace de E. Si de plus $F \cap G = 0$, alors on note $F \oplus G = F + G$.

Définition

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition-définition. Tout espace vectoriel a une base. Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est noté $\dim E$, c'est la *dimension* de E.

Proposition. Une famille libre maximale est une base, une famille génératrice minimale est une base.

Exemples : $\dim \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) = mn$; $\dim K[X]$ dénombrable, $\dim K_n[X] = n+1$, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2 (de base $1, i$),$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension non dénombrable.

Exemples. a) L'espace $\mathscr{F}$ des suites réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $^\forall n \geq 2,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2. Voici une base : $\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) L'espace $\mathscr{E}$ des fonctions y dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ telles que :
$^{\forall}x \in \mathbb{R},\ y''(x) = -y(x)$
est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2.
Voici une base : $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$.

Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons $\mathscr{P}$ les sous-espace des fonctions paires continues, $\mathscr{I}$ celui des fonctions impaires continues. Alors :
$E = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Définition. Soient $v_1, ..., v_N \in E$, un espace vectoriel. Le rang de $(v_1, ..., v_N)$ est la dimension du sous-espace engendré : $\langle v_1, ..., v_N \rangle$.

Si $v_1, \ldots, v_N$

Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Soit r_L le rang des lignes de A *i.e.* la dimension du sous-espace de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes. Soit r_C le rang des colonnes de A *i.e.* la dimension du sous-espace de $\mathscr{M}_{m1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes.

Théorème.
$r_L = r_C = \min\{k \geq 0 \ : \ ^{\exists} B \in \mathscr{M}_{mk}(\mathbb{K}),\ C \in \mathscr{M}_{kn}(\mathbb{K}),\ A = BC\}$.
On note $\operatorname{rg} A := r_L(A) = r_C(A)$.

Notons $L_1, ..., L_m$ les lignes de A. Soient $L_{i_1}, ..., L_{i_r}$ des lignes génératrices du sous-espace engendré par les L_i.Alors pour tout k,

$$L_k = \sum_{j=1}^{r} b_{kj} L_{i_j} \quad .$$

Alors $A = BC$ avec $B = (b_{kj})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le j \le r}}$ et $C = \begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \hline \vdots \\ \hline L_{i_r} \end{pmatrix}$. Donc

$$r_L(A) \geq \min\{k \geq 0 \ : \ ^\exists\, B \in \mathscr{M}_{mk}(\mathbb{K}),\, C \in \mathscr{M}_{kn}(\mathbb{K}),\, A = BC\} \ .$$

D'un autre côté, si $A = BC$ avec $B \in \mathscr{M}_{mk}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{kn}(\mathbb{K})$,alors pour tout i, $L_i(A) = \sum_{j=1}^{k} B_{ij} L_j(C) \in \langle L_1(C), ..., L_k(C)\rangle$.Donc $r_L(A) = \dim\langle L_1(A), ..., L_m(A)\rangle \leq k$.

On raisonne de même avec les colonnes de A ... **Q.e.d.**

Calcul pratique :

- si on multiplie A à gauche par une matrice inversible(forcément de taille m),on ne change pas le rang des lignes ;
- si la matrice A est échelonnée, alors le rang de A est le nombre de ses lignes non nulles.

Pour calculer le rang de A il suffit donc de transformer A en une matrice échelonnée par des opérations élémentaires sur les lignes de A et de compter à la fin le nombre de lignes non nulles.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_3-7L_1}{\overset{L_2-4L_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \overset{L_3-2L_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r.Alors il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$et une matrice inversible $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Exemple. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$