

0.1 Trace

La trace d'une matrice carrée A est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{i,i} .$$

Proposition 0.1.1 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$, alors $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

0.2 Déterminant

0.2.1 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\det A = |A| := ad - bc$.

Propriétés :

i) $\det AB = \det A \det B$;

ii) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible et dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

0.2.2 3×3

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, on pose

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{21}a_{32} .$$

Propriétés :

i) $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$;

- ii) $\det {}^t A = \det A$;
- iii) si A a deux lignes ou deux lignes égales, alors $\det A = 0$;
- iv) $\det AB = \det A \det B$;
- v) $\det A = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} |A^{ij}| = \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} |A^{ij}|$ où A^{ij} est la matrice 2×2 obtenue en barrant la ligne i et la colonne j .

Ces propriétés se démontrent directement à partir de la formule de définition; pour la multiplicativité, les calculs sont un peu longs mais pas trop ...

Définition 1 (la comatrice) On pose $\tilde{A} := ((-1)^{i+j} |A^{ij}|)_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Lemme 0.2.1 On a toujours :

$$A {}^t \tilde{A} = {}^t \tilde{A} A = \det A I_3$$

Démonstration : On a :

q.e.d.

Théorème 0.2.2 Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

0.3 Matrices équivalentes et matrices semblables

Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, alors A, B sont équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{M}_m(K)$ et $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ inversibles telles que $A = PBQ$.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, alors A, B sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{M}(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Remarques :

a) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont équivalentes car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) si A, B sont semblables, alors $\text{tr} A = \text{tr} B$ (car $\text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr} B$). En particulier les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

c) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

0.4 Exemple d'application

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ si $n \geq 1$.

Alors $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$. En effet, on pose $X_n := \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ si

$n \geq 0$ et $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De sorte que : $X_{n+1} = AX_n$. Donc, $X_n = AX_0 =$

$A^t(0, 1)$ = la deuxième colonne de A .

Or, $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta' \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$, $\delta := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ et $\delta' := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Par conséquent, $A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \delta^n & 0 \\ 0 & \delta'^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} ? & \delta^n - \delta'^n \\ ? & \delta^{n+1} - \delta'^{n+1} \end{pmatrix}$.

D'où le résultat

Chapitre 1

Espaces vectoriels [4]

Chapitre 2

Applications linéaires [5]

Chapitre 3

Réels [1/2]

Chapitre 4

Fractions rationnelles [1]

Chapitre 5

Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques usuelles [1]

Chapitre 6

Intégration [4+1/2]

Chapitre 7

Développements limités [3]

Chapitre 8

Équations différentielles [2]