Soit $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $P = a_0 + ... + a_d X^d$ un polynôme où $a_0, ..., a_d \in K$.
On note $d = \deg P$ le plus grand entier $i \geq 0$ tel que $a_i \neq 0$. Si $P = 0$, on pose $\deg P = -\infty$. C'est le **degré** de P.
Le terme dominant est $a_d X^d$, a_d est le coefficient dominant de P.On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes.

Somme :
si $P = a_0 + ... + a_m X^m$ et $Q = b_0 + ... + b_n X^n$ sont des polynômes, alors on pose

$$P + Q = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) X^i$$

Produit.

$$PQ = \sum_{i=0}^{m+n} c_i X^i$$

où $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$.
On vérifie que $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.
On en déduit que si $PQ = 0$, alors P ou $Q = 0$.

Évaluation

Si $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in K[X]$, si $a \in K$, on pose :

$$P(a) = a_0 + a_1 a + ... + a_n a^n \in K \ .$$

Alors
${}^\forall P,\ Q \in K[X]$, $(P+Q)(a) = P(a)+Q(a)$ et $(PQ)(a) = P(a)Q(a)$.

Divisibilité.
Si P, Q sont des polynômes, si $P = BQ$ pour un certain polynôme B, on dit que Q divise P, notation : $Q|P$.

Proposition (*Division euclidienne.*) Soient P, Q polynômes avec $Q \neq 0$. Il existe un unique (B, R) couple de polynômes tel que $P = BQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$.

Par exemple, si $a \in K$, alors

$$X - a | P \Leftrightarrow P(a) = 0 \ .$$

Définition. (*Polynômes irréductibles) :*
un polynôme P non constant est irréductible s'il n'existe pas de polynôme Q de degré $0 < d < \deg P$ tel que $Q|P$.

Remarque. En particulier, les polynômes de degré 1 sont toujours irréductibles !

Théorème. Dans $\mathbb{C}[X]$, un polynôme P est irréductible
$\Leftrightarrow \deg P = 1$.

$$X^n - 1 = (\prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \ .$$

Théorème. Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme P est irréductible $\Leftrightarrow \deg P = 1$ ou $\deg P = 2$, $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $\Delta(P) = a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$.

Exemples. $X^2 + 1,\ X^2 + X + 1.$

Contre-exemples. $X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$.

Dans $\mathbb{Q}[X]$, les polynômes

$$X^n - 2,\ X^n - X - 1,\ \frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + ... + 1$$

sont irréductibles pour tout $n \geq 1$.

Proposition. soit $P \in K[X]$. Alors il existe $c \in \mathbb{K}^\times$, $P_1, ..., P_r$ irréductibles unitaires (*i.e.* de coefficient dominant 1) deux à deux distincts tels que

$$P = cP_1^{a_1} ... P_r^{a_r}$$

pour certains $a_i \geq 1$. De plus, c, r ; les P_i et les a_i dont uniques (à permutation près).

Démonstration. Par récurrence sur $\deg P$.

Exemples.

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \ .$$

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) \ .$$

Définition. on dit que deux polynômes $P, Q \in K[X]$ sont premiers entre eux si $D|P$ et $D|Q \Rightarrow D =$constante.

Démonstration. Les polynômes $P, Q \in K[X]$ sont premiers entre eux $\Leftrightarrow {}^{\exists} U, V \in K[X]$ polynômes tels que $PU + QV = 1$ (relation de Bézout).

Démonstration. On utilise l'algorithme d'Euclide ...

Exemple de relation de Bézout entre deux polynômes premiers entre eux.

Soit $P(X) = X^3 + 1$, $Q(X) = X^2 + X + 2$.

Appliquons l'algorithme d'Euclide à P, Q pour trouver une relation de Bézout ...

$X^3 + 1 = (X^2 + X + 2)(X - 1) - X + 3$

$X^2 + X + 2 = (-X + 3)(-X - 4) \qquad \underbrace{+13}_{\text{dernier reste non nul}}$

$-X + 3 = \underbrace{+13} \times \frac{(\ \ X + 3)}{13} + 0$

Donc

$1 = \frac{1}{13} \times 13 = \frac{1}{13}(X^2 + X + 2 - (-X + 3)(-X - 4))$

$= \frac{1}{13}(X^2 + X + 2 - (X^3 + 1 - (X^2 + X + 2)(X - 1))(-X - 4))$

$= \frac{1}{13}((X^2 + X + 2)(1 + (X - 1)(-X - 4)) - (X^3 + 1)(-X - 4))$

$= (X^2 + X + 2)\left(\underbrace{\frac{1}{13}(X^2 - 3X + 5)}_{V}\right) + (X^3 + 1)\left(\underbrace{\frac{1}{13}(X + 4)}_{U}\right)$

$X^3 + 1$	$X^2 + X + 2$
$X^3 + X^2 + 2X$	$X - 1$
$-X^2 - 2X + 1$	
$-X^2 - X - 2$	
$-X + 3$	

$X^2 + X + 1$	$-X + 3$
$X^2 - 3X$	$-X - 4$
$4X + 1$	
$4X - 12$	
13	

Lemme de Gauss. Si $A, B, C \in K[X]$ sont tels que

$$A|BC$$

et A, B premiers entre eux, alors$A|C$.

Définition : On note

$$K(X) = \{\frac{P}{Q} \ : \ P \in K[X], \ Q \in K[X], \ Q \neq 0\}$$

où deux symboles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$, $P, Q, R, S \in K[X]$, $Q, S \neq 0$, sont égaux si et seulement si : $PS = QR$.

Addition.

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}$$

Multiplication.

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$$

Degré

Définition. $\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg P - \deg Q$.

Forme réduite

Définition. On dit qu'une fraction $f = \frac{P}{Q}$ est sous forme réduite ou *irréductible* si les polynômes P, Q sont premiers entre eux.

Exemple. $\frac{X^2-1}{X^3-1} = \frac{X+1}{X^2+X+1}$.

Définition. Un **élément simple** est une fraction de la forme $\frac{A}{P^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, P est un polynôme irréductible et A est un polynôme de degré $< \deg P$.

Exemples. Pour $\mathbb{C}(X)$: $\frac{a}{(X-z)^n}$ où $n \in \mathbb{N}_{>}0$, $a, z \in \mathbb{C}$.

Pour $\mathbb{R}(X)$: $\frac{a}{(X-x)^n}$ où $n \in \mathbb{N}_>0$, $a, x \in \mathbb{R}$
et $\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}$ où $n \in \mathbb{N}_>0$, $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ avec $p^2 < 4q$.

Théorème. *Existence.*
Soit f une fraction rationnelle dans $K(X)$, alors f se décompose en

$$f = E + \sum_i f_i$$

où $E \in K[X]$ est un polynôme et les f_i sont des éléments simples dans $K(X)$.

Théorème. *Unicité.*
Si $f \in K(X)$ est une fraction rationnelle alors f s'écrit de manière unique :

$$f = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \right)$$

où $n \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}$, $D_i \in K[X]$ sont irréductibles unitaires deux à deux distincts, $A_{ij} \in K[X]$ sont de degré $\deg A_{ij} < \deg D_i$ *(donc constants si D_i de degré* 1 *et de degré* ≤ 1 *si D_i de degré* 2*).*

De plus si $f = \frac{P}{Q}$ est la forme réduite de f, alors E est le reste de la division euclidienne de P par Q. Les D_i et n_i sont ceux qui apparaissent dans la factorisation $Q = D_1^{n_1} ... D_r^{n_r}$.

Exercice. les éléments simples

$$\frac{1}{(X-r)^n},\ r \in \mathbb{C},\ n \geq 1$$

forment une base du sous-espace vecoriel des fractions rationnelles de degré < 0.

Exercice. Les éléments simples

$$\frac{1}{(X-r)^n},\ \frac{1}{(X^2+pX+q)^n},\ \frac{X}{(X^2+pX+q)^n},$$

$r \in \mathbb{R},\ n \geq 1,\ p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$, forment une base du sous-espace vectoriel des fractions rationnelles réelles de degré < 0.

Exemples. Si $f = P/Q$ est irréductible, si $Q = (X - a)Q_1$ avec $Q_1(a) \neq 0$, alors f a un élément simple de la forme $\lambda/(X - a)$ avec $\lambda = P(a)/Q'(a)$. Plus généralement, si $Q = (X - a)^h Q_1$ avec $Q_1(a) \neq 0$, alors f a un élément simple de la forme $\lambda/(X - a)^h$ avec $\lambda = P(a)/Q_1(a)$.

Exemples a)

$$\frac{X+3}{(X-1)(X+2)} = \frac{4/3}{X-1} + \frac{(-1/3)}{X+2} \ .$$

Exemples b)

Si $\deg P < n$, alors

$$\frac{P}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k P(z^k)}{X - z^k}$$

où $z = e^{2i\pi/n}$.

Exemples c)

$$\frac{X+2}{(X+1)^2(X-2)^2} = \frac{(-5/27)}{X-2} + \frac{4/9}{(X-2)^2} + \frac{5/27}{X+1} + \frac{1/9}{(X+1)^2}$$

Exemples d)

$$\frac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = ?$$

Exemples e)

$$\frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = ?$$

Exemples f)

Soit $P(X) = (X - a_1)^{n_1}...(X - a_r)^{n_r}$ pour des $a_i \in K$ deux à deux distincts et des $n_i \geq 1$. Alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X - a_i} \quad .$$

Applications

Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Applications

Calculer $\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}$

Applications

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. *Indication : décomposer la fraction* $\frac{\mathbf{1}}{k(k+\mathbf{1})(k+\mathbf{2})}$ *en éléments simples ...*

Applications

Trouver deux polynômes U, V tels que $U(X-1)^3 + V(X+1)^3 = 1$.

Indication : décomposer $\frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$ en éléments simples ...

Applications

Soit $T_n(X)$ tel que $T_n(\cos x) = \cos nx$. Décomposer

$$\frac{1}{T_n(X)}$$

en éléments simples.

Rappels sur le cours d'hier + quelques exemples de décomposition en éléments simples :

Théorème. Toute fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q} \epsilon K(X)$, $P, Q \epsilon K[X]$ se décompose :

$f = E + \sum_i f_i$ où $E \epsilon K[X]$et les f_i sont des éléments simples.

Cas où $\boldsymbol{K = \mathbb{R}}$.

les éléments simples sont des fractions de la forme :

$\frac{a}{(X-x)^n}$ où $a, x \epsilon \mathbb{R}, n \epsilon \mathbb{N}$, ou bien $\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}$ où $a, b \epsilon \mathbb{R}$, $n \epsilon \mathbb{N}$, et $p, q \epsilon \mathbb{R}$tels que $p^2 < 4q$.

Méthode pour obtenir la décomposition d'une fraction $\boldsymbol{\frac{P}{Q}}$ si $\boldsymbol{P, Q \epsilon \mathbb{R}[X]}$.

1) on se ramène à décomposer une fraction de degré <0.

On fait la division euclidienne de P par Q.

Exemple. $\frac{x^3}{x^2+x-2} = \frac{(x^2+x-2)(x-1)+x}{x^2+x-2} = x-1+\underbrace{\frac{x}{x^2+x-2}}_{\text{degré}<0}$

x^3	x^2+x-2
x^3+x^2-2	$x-1$
$-x^2+2$	
$-x^2-x+2$	
x	

2)on factorise le dénominateur

Exemple. $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

3) on écrit les éléments simples possibles

$\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$ unicité des coefficients !

4) on cherche les valeurs des coefficients

$\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$

$a = \frac{x_{|x=1}}{(x^2+x-2)'_{|x=1}} = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{x_{|x=-2}}{(x^2+x-2)'_{|x=-2}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

Conclusion : $\frac{x^3}{x^2+x-2} = x-1+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{\frac{2}{3}}{x+2}$.

Autre exemple.

a)$\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{x+7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3} = \frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x-3}$

$a = \frac{5}{-5} = -1$ et $b = \frac{10}{5} = 2$.

b) $\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{(X-1)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)\ldots\left(X-e^{\frac{i(n-1)\pi}{n}}\right)}$

$=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$. Avec $a_k = \frac{1}{ne^{\frac{2i(n-1)k\pi}{n}}} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n}$.

$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$

c) cas où facteurs avec exposants $\geqslant 2$.

$\frac{6x-11}{(x-1)^3} = \frac{-5}{(x-1)^3}+\frac{6}{(x-1)^2}+\frac{0}{(x-1)} = -\frac{5}{(x-1)^3}+\frac{6}{(x-1)^2}$

on pose $t = x-1$.

$\frac{6(t+1)-11}{(t)^3} = \frac{6t-5}{t^3} = \frac{6}{t^2}-\frac{5}{t^3}$

autre exemple. $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}$

$$=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{c}{(x-2)}$$

$$a=\frac{-x^2+2x+4_{|x=0}}{(x(x-2)^2)'_{|x=0|}}=\frac{4}{4}=1$$

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{1}{x}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{c}{(x-2)}$$

$$\Rightarrow\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}-\frac{1}{x}=\frac{-x^2+2x+4-(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{-2x^2+4x}{x(x-2)^2}=\frac{-2x+4}{(x-2)^2}$$

On pose $t=x-2\Leftrightarrow x=t+2$

$$\frac{-2x+4}{(x-2)^2}=\frac{-2(t+2)+4}{t^2}=\frac{-2}{t}.$$

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{(x-2)}.$$

Cas où on a des facteurs irréductibles de degré 2

$$\frac{8x^2+12x-20}{(x+3)\left(\underbrace{x^2+x+2}_{\text{irréductible}}\right)}=\frac{a}{x+3}+\frac{bx+c}{x^2+x+2}$$

$$a=\frac{8\times 9+12\times(-3)-20}{(-3)^2-3+2}=2$$

$$\frac{8x^2+12x-20}{(x+3)\left(x^2+x+2\right)}-\frac{2}{x+3}=\frac{8x^2+12x-20-2\left(x^2+x+2\right)}{(x+3)\left(x^2+x+2\right)}$$

$$=\frac{6x^2+10x-24}{(x+3)\left(x^2+x+2\right)}=\frac{6x-8}{x^2+x+2}.$$

Cas *o*ù on *a*

des facteurs irréductibles de degré 2 multiples.

$$\frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}=E(x)+\frac{ax+b}{(x^2+x+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

divisions euclidiennes répétées par x^2+x+1

x^7+2	x^2+x+1
$x^7+x^6+x^5$	$x^5-x^4+x^2-x$
$-x^6-x^5+2$	
$-x^6-x^5-x^4$	
x^4+2	
$x^4+x^3+x^2$	
$-x^3-x^2+2$	
$-x^3-x^2-x$	
$-x+2$	

$$x^7+2=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x)-x+2$$

$$\frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^5-x^4+x^2-x}{x^2+x+1}+\frac{-x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

$x^5-x^4+x^2-x$	x^2+x+1
$x^5+x^4+x^3$	x^3-2x^2+3x
$-2x^4-x^3+x^2-x$	
$3x^3+3x^2-x$	
$-4x$	

$$\frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{(x^2+x+1)(x^3-2x^2+3x)-4x}{x^2+x+1}+\frac{-x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=x^3-2x^2+3x-\frac{4x}{x^2+x+1}+\frac{-x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

Cas où au moins deux facteurs de degré 2 (irréductibles)

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 1=(ax+b)(x^2+1)+(cx+d)(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow 1=x^3(a+c)+x^2(b+c+d)+x(a+c+d)+b+d\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=0\\b+c+d=0\\a+c+d=0\\b+d=1\end{cases}\Leftrightarrow a=1,c=-1,b=1,d=0.$$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{ax+1}{x^2+x+1}-\frac{x}{x^2+1}$$

Applications.

Calculer $\int\frac{x^3dx}{x^2+3x+2}=?$

Notation. Si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $\int f(x)dx$ les primitives de f sur I c-à-d les fonctions F dérivables sur I telles que $\forall x\epsilon I, F'(x)=f(x)$.

1ère étape = décomposer en éléments simples

$$\frac{x^3}{x^2+3x+2}=x+3+\frac{7x-6}{x^2+3x+2}$$

$$x^3=(x^2-3x+2)(x+3)+7x-6$$

Or, $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

Donc $\frac{7x-6}{x^2+3x+2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$

$a=\frac{-13}{1}=-13.$ $b=\frac{-20}{-1}=20.$

2ème étape : on «intègre» les éléments simples.

$$\int \frac{x^3dx}{x^2+3x+2} = \int (x+3)dx\text{-}13\int \frac{dx}{x+1} + 20\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - 13\ln(x+1) + 20\ln(x+2) + C$$

où $C =$ constante.