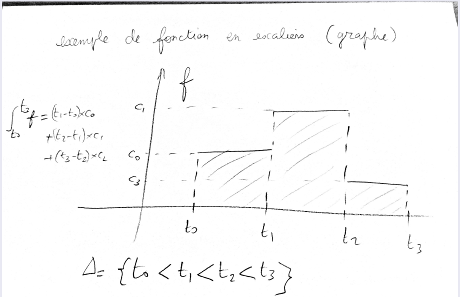
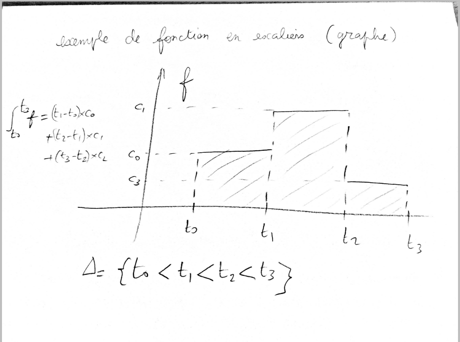
Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Définition. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *en escaliers* s'il existe $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ une subdivision de l'intervalle telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, f est constante (égale à une certaine constante $c_i \in \mathbb{R}$) sur l'intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$. Dans ce cas, on dit que la subdivision Δ est adaptée à f.

Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Définition. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe $\Delta = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ une subdivision de l'intervalle telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, f est constante (égale à une certaine constante $c_i \in \mathbb{R}$) sur l'intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$. Dans ce cas, on dit que la subdivision Δ est adaptée à f.*





Exemple. Soit $I \subseteq [a, b]$ un intervalle.On pose $\chi_I : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

Exemple. Soit $I \subseteq [a,b]$ un intervalle. On pose $\chi_I : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in I, \\ 0 & si\ x \notin I. \end{cases}$$

La fonction χ_I est en escaliers.

Exercice. L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ l'espace des fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}$. Les fonctions χ_I, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, forment une famille génératrice de l'espace $\mathscr{E}([a,b])$.

Exercice. *L'ensemble* $\mathscr{E}([a,b])$ *des fonctions en escaliers sur* $[a,b]$ *est un sous-*$\mathbb{R}-$*espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{[a,b]}$ *l'espace des fonctions :* $[a,b] \to \mathbb{R}$. *Les fonctions* χ_I, *I intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, *forment une famille génératrice de l'espace* $\mathscr{E}([a,b])$.

Remarques.

a) on a $f([a,b]) = \{c_i \, : \, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(t_i) \, : \, 0 \leq i \leq n\}$; en particulier f ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est bornée ;

b) si $\Delta \subseteq \Delta'$ sont des subdivisions de $[a,b]$ (on dit que Δ' est une subdivision plus fine que Δ),alors si Δ est adaptée à f, fonction en escaliers, Δ' aussi.

Remarques.

a) *on a* $f([a,b]) = \{c_i \ : \ 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(t_i) \ : \ 0 \leq i \leq n\}$ *; en particulier* f *ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est bornée ;*

b) *si* $\Delta \subseteq \Delta'$ *sont des subdivisions de* $[a,b]$ *(on dit que* Δ' *est une subdivision plus fine que* Δ*), alors si* Δ *est adaptée à* f*, fonction en escaliers,* Δ' *aussi.*

Définition. soit f une fonction en escaliers sur $[a,b]$. Le nombre :

$$I_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) c_i$$

où $\Delta = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f et $f\Big|_{]t_i,t_{i+1}[} = c_i$, est indépendant de la subdivision adaptée à f choisie.
On le note : $\int_a^b f$

Définition. *soit f une fonction en escaliers sur $[a, b]$. Le nombre :*

$$I_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) c_i$$

où $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f et $f\Big|_{]t_i, t_{i+1}[} = c_i$, est indépendant de la subdivision adaptée à f choisie. On le note : $\int_a^b f$.

Exercice. Soit I un intervalle contenue dans $[a, b]$. On a $\int_a^b \chi_I = l(I)$ la longueur de l'intervalle I.

Exercice. *Soit I un intervalle contenue dans $[a,b]$. On a $\int_a^b \chi_I = l(I)$ la longueur de l'intervalle I.*

Propriétés.

a) Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

b) L'application $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire.

Propriétés.

a) *Si* $f \leq g$, *alors* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

b) *L'application* $f \mapsto \int_a^b f$ *est linéaire.*

Définition. Soit f une fonction **BORNÉE** sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.
On dit que f est *Riemann-intégrable* (*ri*) si :

$$^{\forall}\epsilon > 0, \; ^{\exists}e \leq f \leq E,$$

$$\int_a^b (E - e) \leq \epsilon$$

et e, E en escaliers.

Définition. *Soit f une fonction* **BORNÉE** *sur un intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.

On dit que f est Riemann-intégrable (ri) si :

$$^{\forall}\epsilon > 0, \; ^{\exists}e \leq f \leq E,$$

$$\int_a^b (E - e) \leq \epsilon$$

et e, E *en escaliers.*

Exemples.

1. les fonctions en escaliers !
2. les fonctions monotones !
3. les fonctions continues ! *patience*

Exemples.

1. *les fonctions en escaliers !*
2. *les fonctions monotones !*
3. *les fonctions continues ! patience*

Contre-exemple. La fonction

$$\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ 0 \text{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable.

Contre-exemple. La fonction

$$\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \textit{ si } x \in \mathbb{Q},\ 0 \textit{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable.

Définition. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.On pose

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sup_e \int_a^b e$$

où $e \leq f$ est en escaliers.
Si f est en escaliers c'est la même définition qu'avant ...

Définition. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction Riemann-intégrable. On pose*

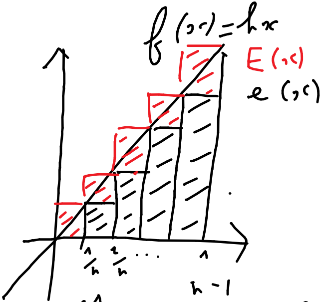
$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sup_e \int_a^b e$$

où $e \leq f$ *est en escaliers.*
Si f *est en escaliers c'est la même définition qu'avant ...*

Exercice. Si f est ri alors $\int_a^b f = \inf_E \int_a^b E$ où $E \geq f$ est en escaliers.

Exercice. *Si f est ri alors $\int_a^b f = \inf_E \int_a^b E$ où $E \geq f$ est en escaliers.*

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto hx$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f = h/2$.



$$\int_0^1 e = \sum_{i=0}^{n-1} h\frac{i}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{hn(n-1)}{2n^2} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{h}{2}$$

$$\int_0^1 E = \sum_{i=0}^{n-1} h\frac{(i+1)}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{hn(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{h}{2}$$

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto hx$ *est Riemann-intégrable sur* $[0,1]$ *et* $\int_0^1 f = h/2$.

Si $f \geq 0$ est Riemann-intégrable, on peut interpréter $\int_a^b f$ comme l'aire de la partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Si $f \geq 0$ est Riemann-intégrable, on peut interpréter $\int_a^b f$ comme l'aire de la partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Si $a > b$, si f est intégrable sur $[b,a]$, on pose $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Si $a > b$, si f est intégrable sur $[b, a]$, on pose $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Théorème.

Soient $a \leq c \leq b \in \mathbb{R}$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b] \Leftrightarrow$ f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Théorème.
Soient $a \leq c \leq b \in \mathbb{R}$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Théorème. Si $f \leq g$ sont Riemann-intégrables, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Théorème. *Si* $f \leq g$ *sont Riemann-intégrables, alors* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Proposition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose $f \geq 0$. Alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$.

Proposition. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. On suppose* $f \geq 0$*. Alors* $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$*.*

Exercice. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et si

$$^{\forall}x,\ f(x) > 0$$

alors $\int_a^b f > 0$.

Exercice. *Si f est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$ *et si*

$$^{\forall}x,\ f(x) > 0$$

alors $\int_a^b f > 0$.

Théorème : L'ensemble $\mathcal{I}([a, b])$ des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions bornées $[a, b] \to \mathbb{R}$. De plus,

$$\mathcal{I}([a, b]) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f$$

est linéaire.

Théorème : *L'ensemble $\mathcal{I}([a,b])$ des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions bornées $[a,b] \to \mathbb{R}$. De plus,*

$$\mathcal{I}([a,b]) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f$$

est linéaire.

Proposition. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Alors $|f|$ aussi et :

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Proposition. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Alors $|f|$ aussi et :*

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe e, E des fonctions en escalier telles que $e \leq f \leq E$ et $\int_a^b (E - e) < \epsilon$.
Alors $||f| - |e|| \leq |f - e| = f - e \leq E - e$. Donc : $|e| - (E - e) \leq |f| \leq E - e + |e|$. Or $|e| \pm E - e$ sont des fonctions en escaliers et $\int_a^b (|e| + E - e - (|e| - (E - e))) = 2\int_a^b (E - e) < 2\epsilon$.
Donc $|f|$ est aussi Riemann-intégrable. De plus, $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow |\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. **Q.e.d.**

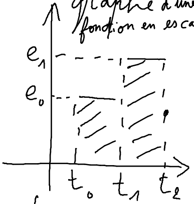
Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe e, E des fonctions en escalier telles que $e \leq f \leq E$ et $\int_a^b (E - e) < \epsilon$.
Alors $||f| - |e|| \leq |f - e| = f - e \leq E - e$. Donc : $|e| - (E - e) \leq |f| \leq E - e + |e|$.
Or $|e| \pm E - e$ sont des fonctions en escaliers et $\int_a^b (|e| + E - e - (|e| - (E - e))) = 2\int_a^b (E - e) < 2\epsilon$.
Donc $|f|$ est aussi Riemann-intégrable. De plus, $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow |\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. **Q.e.d.**

Contre-exemple. La fonction

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ -1 \text{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable mais $|f|$ l'est.

graphe d'une fonction en escaliers : e



$$\int_{t_0}^{t_2} e = (t_1 - t_0)e_0 + (t_2 - t_1)e_1$$

Contre-exemple. La fonction

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ -1 \text{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable mais $|f|$ l'est.

Théorème. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.Alors f est Riemann-intégrable.

Théorème. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ Alors f est uniformément continue *ie* :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \epsilon [a,b], |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Raisonnons par l'absurde. Si on ne peut pas trouver $\eta > 0$ alors :
$\forall n \epsilon \mathrm{N}_{>0}, \exists x_n, y_n \epsilon [a,b], \ |x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.

Posons $\overline{x_n}$=sup $\{x_k | k \geqslant n\}$. Alors la suite $(\overline{x_n})$ est décroissante dans $[a,b]$ donc converge ver un certain $x \epsilon [a,b]$.

Comme f est continue, $\lim_n f(\overline{x_n}) = f(x)$.
Or, $\forall n, \exists k_n \geqslant n, \ \overline{x_n} - \frac{1}{n} \leqslant x_{k_n} \leqslant \overline{x_n}$. Donc $\lim_n x_{k_n} = \lim_n \overline{x_n} = x$.
Or, pour tout n, $|x_{k_n} - y_{k_n}| \leqslant \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{1}{n}$. Donc $\lim_n y_{k_n = \lim_n x_{k_n}} = x$. Comme f est continue, on a aussi :

$\lim_n f(x_{k_n}) = \lim_n f(y_{k_n}) = f(x)$. Or, pour tout n, $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geqslant \varepsilon > 0$. *Absurde !* □

$\boxed{\text{**Théorème.** Soit } f \text{ une fonction continue sur un segment } [a,b]. \text{ Alors } f \text{ est Riemann-intégrable sur } [a,b]}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \epsilon [a,b], \ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ (1)$$

On pose $a = t_{0 < \ldots <} t_n = b$ tels que :
$t_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $0 \leqslant i \leqslant n$ où n est choisi pour que $\frac{b-a}{n} < \eta$.

Posons pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $m_i = \min_{[t_i, t_{i+1}]} f$ et M_i=$\max_{[t_i, t_{i+1}]} f$.

D'après (1), $M_i - m_i < \varepsilon$, pour tout i.

Posons e la fonction en escaliers telle que $e = m_i$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $e(b) = m_n$. On définit E la fonction en escaliers telle que $E = M_i$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[\, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $E(b) = M_n$.

Alors bien entendu, $e \leqslant f \leqslant E$ et $\int_a^b (E-e) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(M_i - m_i) < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = (b-a)\varepsilon$.

C'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc f est Riemann-intégrable ! □

Théorème. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est Riemann-intégrable.*

Corollaire. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et **bornée** (*c-à-d : il existe $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tels que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$*)
alors f est Riemann-intégrable.

Corollaire. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est continue par morceaux et* **bornée**
(c-à-d : il existe $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ *tels que pour tout* $0 \leq i \leq n-1$*,* f *est continue sur* $]x_i, x_{i+1}[$*)*
alors f *est Riemann-intégrable.*

Théorème. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction :

$$F : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f$$

est dérivable et

$$^{\forall} a \leq x \leq b,\ F'(x) = f(x)\ .$$

Théorème. Soit $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

Si on pose $F(x)=\int_a^x f$, alors F est dérivable et :

$\forall x\epsilon[a,b],\ F'(x)=f(x)$.

Démonstration. $\frac{F(x+t)-F(x)}{t}\underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow}f(x)$.

en effet, $\frac{F(x+t)-F(x)}{t}-f(x)=\quad\frac{1}{t}\int_x^{x+t} f\quad - f(x)$

relation de Chasles

$=\frac{1}{t}\int_x^{x+t}(f-f(x))$.

Comme f est continue en x, si $\varepsilon>0,$ alorsil existe $\eta>0,$ tel que $|x-y|\leqslant\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Donc si $0<|t|\leqslant\eta$, alors $|\int_x^{x+t}(f-f(x))|\leqslant\int_x^{x+t}|f-f(x)|\leqslant\int_x^{x+t}\varepsilon=t\varepsilon$.

D'où : $\frac{1}{t}|\int_x^{x+t}(f-f(x))|\leqslant\varepsilon$.

C'est vrai pourtout $\varepsilon>0$. Donc $\frac{1}{t}|\int_x^{x+t}(f-f(x))|\underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow}0$.$\square$

Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction :*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\, x \mapsto \int_a^x f$$

est dérivable et

$$^{\forall} a \leq x \leq b,\, F'(x) = f(x) \ .$$

En particulier, si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$,alors

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a) \ .$$

Si F est $\mathcal{C}^1$(c-à-d : F dérivable de dérivée continue), alors $x \mapsto \int_a^x F'$ est dérivable de dérivée :

$(x \mapsto \int_a^x F')' = F'$.

Donc $x \mapsto \int_a^x F' = F'$ + constante

Or $\int_a^a F' = 0$. Donc constante $= -F'(a)$.

En $x = b$, on trouve : $\int_a^b F' = F'(b) - F'(a)$.

Exemple. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos)'$

$= \underbrace{(-\cos)\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - (-\cos(0)) = 1.$

NOTATION IMPORTANTE.

$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$

«pour rappeler que x est la variable (qui varie entre a et b)».

En particulier, si F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a) \ .$$

Proposition. Si u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b uv' = \ [uv]_a^b - \int_a^b u'v \ .$$

Proposition. *Si* u, v *sont* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *, alors :*

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \ .$$

Exercice : calculer $\int_0^\pi x \sin x dx,\ \int_0^1 x^2 e^x dx,\ \int_1^x \ln t dt,\ \int_0^1 \arctan x dx.$

INTÉGRATION PAR PARTIES.

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin(x)}_{v'}dx = [uv]_0^\pi - \int_0^\pi u'v$$

$$=(uv)(\pi) - (uv)(0) - \int_0^\pi u'v$$

$$=-\pi\cos(\pi) - 0 - \int_0^\pi (-\cos(x))dx$$

$$=\pi + \int_0^\pi \cos = \pi + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi.$$

Or, $u' = 1$, $v = -\cos(x)$.

$$\int_0^1 \underset{u}{x^2}\underset{v'}{e^x}dx = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2x\,e^x dx$$

$(u' = 2x,\ v = e^x)$

$$=e - 2\int_0^1 \underset{u}{x}\ \underset{v'}{e^x}dx = e - 2\left([x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = e - 2(e - (e-1)) = e - 2.$$

$u' = 1$, $v = e^x$.

Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Exercice : calculer $\int_0^\pi x \sin x dx$, $\int_0^1 x^2 e^x dx$, $\int_1^x \ln t dt$, $\int_0^1 \arctan x dx$.

Théorème : si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, ALORS

$$f(b) =$$

$$f(a)+(b-a)f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

Théorème : *si f est* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur* $[a,b]$, *ALORS*

$$f(b) =$$

$$f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \;\; .$$

démonstration : récurrence sur n et intégration par parties ...

formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

$\boldsymbol{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \quad dt =}$ **(intégration par parties)$=$**

$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \ldots$

d'où la récurrence ...

$u = f^{(n+1)}(\mathrm{t})$ et $v' = \frac{(b-t)^n}{n!}$

$u' = f^{(n+2)}(t)$ et $v = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

démonstration : *récurrence sur n et intégration par parties ...*

Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\phi([a,b]) \subseteq I$. Alors :

a)

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx \ .$$

b) Si de plus ϕ est bijective $[a,b] \to [\phi(a), \phi(b)]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt \ .$$

Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\phi([a, b]) \subseteq I$. Alors :

a)

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx \ .$$

b) *Si de plus ϕ est bijective $[a, b] \to [\phi(a), \phi(b)]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt \ .$$

Exercice :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dt = \frac{\pi}{2} \ .$$

Changement de variables.

Remarque.

Si $F' = f$ alors $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi).\varphi'$.

Donc $\int_a^b (F \circ \varphi)' = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) = \int_a^b (f \circ \varphi).\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'$.

$$\int_a^b f\left(\underbrace{\varphi(t)}_{x}\right)\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Moyen mnémotechnique :

$$«\frac{dx}{dt}» = x'(t) \Rightarrow dx = x'(t)dt.$$

Exemple.

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = ?$

Poser $x = \cos(t)$. Attention, on change aussi les bornes : si $x = -1$, $t = \pi$. Si $x = 1$, $t = 0$.

Et on change aussi dx : $x = \cos(t) \Rightarrow dx = (\cos(t))' dt = -\sin(t) dt$.

Donc, $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} d x = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2(t)} \times (-\sin(t)) d t = -\int_{\pi}^{0} \sin^2(t) d t = \int_{0}^{\pi} \sin^2(t) d t = \int_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \cos(2t) dt$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(\sin(2\pi) - \sin(0)) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dt = \frac{\pi}{2} \ .$$

a) Si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est continue, alors si f est paire, $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$;

b) Si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est continue, alors si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f = 0$;

c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période T, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

a) *Si* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *est continue, alors si* f *est paire,* $\int_{-a}^{a} f = 2 \int_0^a f$ *;*

b) *Si* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *est continue, alors si* f *est impaire, alors* $\int_{-a}^{a} f = 0$ *;*

c) *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est périodique de période* T*, alors pour tout* $a \in \mathbb{R}$*,* $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$*.*

Théorème. Si $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est dérivable et si f' est Riemann-intégrable, alors :

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a) \ .$$

Théorème. *Si* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *est dérivable et si* f' *est Riemann-intégrable, alors :*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a) \ .$$

Notations : si $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ est une subdivision de $[a, b]$, alors on note :

$$h_\Delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \ .$$

Notations : si $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ est une subdivision de $[a, b]$, alors on note :

$$h_\Delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \ .$$

Définition. Si $\xi = (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ avec $^\forall i$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, on pose :

$$S_{\Delta,\xi}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \ .$$

C'est une *somme de Riemann de f*.

Définition. *Si* $\xi = (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ *avec* $^\forall i$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, *on pose :*

$$S_{\Delta,\xi}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \ .$$

C'est une somme de Riemann de f*.*

Théorème. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{h_\Delta \to 0} S_{\Delta,\xi}(f) = \int_a^b f$$

(quelles que soient les point ξ_i *choisis !)*

Théorème. *Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\lim_{h_\Delta \to \mathbf{0}} S_{\Delta,\xi}(f) = \int_a^b f$$

(quelles que soient les point ξ_i choisis !)

Cas particulier : si f est Riemann-Intégrable sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f \ .$$

Exemples

Cas particulier : *si f est Riemann-Intégrable sur $[a, b]$, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \pi/4 \ .$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\pi/4\ .$$

Exercices :

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2.$ Indication : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-1-\ldots-\frac{1}{n}.$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)=\sin 1-\cos 1$

Exercices :

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$. ***Indication :*** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-1-\ldots-\frac{1}{n}$.

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)=\sin 1-\cos 1$

On pose $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$. Alors :

$$I_0=\frac{\pi}{2},\ I_1=1,\ \forall n\geq 1,\ (n+1)I_{n+1}=nI_{n-1}\ .$$

On pose $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$. *Alors :*

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \ \ I_1 = 1, \ ^\forall n \geq 1, \ \ (n+1)I_{n+1} = nI_{n-1} \ \ .$$

Or,

$$I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} \sim I_n$$

Or,

$$I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} \sim I_n$$

Or :

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} . \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = ...$$

$$= \frac{2n \times (2n-2) \times ... \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times ... \times 3} .1$$

Or :

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} . \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = ...$$

$$= \frac{2n \times (2n-2) \times ... \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times ... \times 3} .1$$

Donc

$$I_{2n+1} = \frac{a_n}{2n+1} \sim \frac{a_n}{2n}$$

où

$$a_n = \frac{2 \times 4 \times ... \times 2n}{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}$$

Donc

$$I_{2n+1} = \frac{a_n}{2n+1} \sim \frac{a_n}{2n}$$

où

$$a_n = \frac{2 \times 4 \times ... \times 2n}{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}$$

De même,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times ... \times \frac{1}{2} I_0$$

$$\sim \frac{\pi}{2a_n}$$

De même,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times ... \times \frac{1}{2} I_0$$
$$\sim \frac{\pi}{2a_n}$$

Donc

$$I_{2n+1} \sim I_{2n} \Rightarrow \lim_{n\infty} \frac{a_n^2}{n} = \pi \ .$$

Or

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow a_n \sim k\sqrt{\frac{n}{2}} \ .$$

Donc

$$I_{2n+1} \sim I_{2n} \Rightarrow \lim_{n\infty} \frac{a_n^2}{n} = \pi \ .$$

Or

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow a_n \sim k\sqrt{\frac{n}{2}} \ .$$

Et

$$k^2 = 2\pi \ldots$$