Chapitre VIII. INTÉGRATION

Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Définition : on dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *en escaliers* s'il existe $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ une subdivision de l'intervalle telle que pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, f est constante (égale à une certaine constante $c_i \in \mathbb{R}$) sur l'intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$. Dans ce cas, on dit que la subdivision Δ est adaptée à f.

Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$.
Définition : *on dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ une subdivision de l'intervalle telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, f est constante (égale à une certaine constante $c_i \in \mathbb{R}$) sur l'intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$. Dans ce cas, on dit que la subdivision Δ est adaptée à f.*

Exemple : soit $I \subseteq [a, b]$ un intervalle. On pose $\chi_I : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I, \\ 0 \text{ si } x \notin I. \end{cases}$$

La fonction χ_I est en escaliers.

Exemple : soit $I \subseteq [a, b]$ un intervalle. On pose $\chi_I : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I, \\ 0 \text{ si } x \notin I. \end{cases}$$

La fonction χ_I est en escaliers.

Exo : l'ensemble $\mathscr{E}([a, b])$ des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ l'espace des fonctions : $[a, b] \to \mathbb{R}$. Les fonctions χ_I, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, forment une famille génératrice de l'espace $\mathscr{E}([a, b])$.

Exo : *l'ensemble* $\mathscr{E}([a,b])$ *des fonctions en escaliers sur* $[a,b]$ *est un sous-*$\mathbb{R}-$*espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{[a,b]}$ *l'espace des fonctions :* $[a,b] \to \mathbb{R}$*. Les fonctions* χ_I*,* I *intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*, forment une famille génératrice de l'espace* $\mathscr{E}([a,b])$*.*

Remarques :

a) on a $f([a,b]) = \{c_i \,:\, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(t_i) \,:\, 0 \leq i \leq n\}$; en particulier f ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est bornée ;

b) si $\Delta \subseteq \Delta'$ sont des subdivisions de $[a,b]$ (on dit que Δ' est une subdivision plus fine que Δ), alors si Δ est adaptée à f, fonction en escaliers, Δ' aussi.

Remarques :

a) *on a* $f([a,b]) = \{c_i \;:\; 0 \le i \le n-1\} \cup \{f(t_i) \;:\; 0 \le i \le n\}$ *; en particulier* f *ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est bornée ;*

b) *si* $\Delta \subseteq \Delta'$ *sont des subdivisions de* $[a,b]$ *(on dit que* Δ' *est une subdivision plus fine que* Δ*), alors si* Δ *est adaptée à* f*, fonction en escaliers,* Δ' *aussi.*

Définition : soit f une fonction en escaliers sur $[a,b]$. Le nombre :

$$I_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) c_i$$

où $\Delta = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f et $f\big|_{]t_i, t_{i+1}[} = c_i$, est indépendant de la subdivision adaptée à f choisie. On le note : $\int_a^b f$.

Définition : *soit f une fonction en escaliers sur $[a,b]$. Le nombre :*

$$I_{\Delta}(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)c_i$$

où $\Delta=\{a=t_0<...<t_n=b\}$ est une subdivision adaptée à f et $f\Big|_{]t_i,t_{i+1}[}=c_i$, est indépendant de la subdivision adaptée à f choisie.
On le note : $\int_a^b f$.

Exo : soit I un intervalle contenue dans $[a,b]$. On a $\int_a^b \chi_I = l(I)$ la longueur de l'intervalle I.

Exo : *soit* I *un intervalle contenue dans* $[a, b]$. *On a* $\int_a^b \chi_I = l(I)$ *la longueur de l'intervalle* I.

Propriétés :

a) Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

b) L'application $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire.

Propriétés :

a) *Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

b) *L'application $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire.*

Soit f une fonction **BORNÉE** sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.

On dit que f est Riemann-intégrable si :

$$^{\forall}\epsilon > 0,\ ^{\exists}e \leq f \leq E,$$

$$\int_a^b (E - e) \leq \epsilon$$

et e, E en escaliers.

Soit f une fonction **BORNÉE** *sur un intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.
On dit que f est Riemann-intégrable si :

$$^{\forall}\epsilon > 0, \ ^{\exists}e \leq f \leq E,$$

$$\int_a^b (E - e) \leq \epsilon$$

et e, E en escaliers.

Exemples :

1. les fonctions en escaliers !
2. les fonctions monotones !
3. les fonctions continues ! *patience*

Exemples :

1. *les fonctions en escaliers !*
2. *les fonctions monotones !*
3. *les fonctions continues ! patience*

Contre-exemple : la fonction

$$\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ 0 \text{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable.

Contre-exemple : la fonction

$$\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ 0 \text{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable.

Définition : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. On pose

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sup_e \int_a^b e$$

où $e \leq f$ est en escaliers.

Si f est en escaliers c'est la même définition qu'avant ...

Définition : *soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction Riemann-intégrable. On pose*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sup_e \int_a^b e$$

où $e \leq f$ *est en escaliers.*
Si f *est en escaliers c'est la même définition qu'avant ...*

Exo : si f est ri alors $\int_a^b f = \inf_E \int_a^b E$ où $E \geq f$ est en escaliers.

Exo : *si f est ri alors $\int_a^b f = \inf_E \int_a^b E$ où $E \geq f$ est en escaliers.*

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto hx$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f = h/2$.

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto hx$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f = h/2$.

Si $f \geq 0$ est Riemann-intégrable, on peut interpréter $\int_a^b f$ comme l'aire de la partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Si $f \geq 0$ est Riemann-intégrable, on peut interpréter $\int_a^b f$ comme l'aire de la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Si $a > b$, si f est intégrable sur $[b, a]$, on pose $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Si $a > b$, si f est intégrable sur $[b, a]$, on pose $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Théorème : Soient $a \leq c \leq b \in R$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Théorème : *Soient $a \leq c \leq b \in R$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$. Dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad .$$

Théorème : si $f \leq g$ sont Riemann-intégrables, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Théorème : *si $f \leq g$ sont Riemann-intégrables, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Proposition : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose $f \geq 0$. Alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$.

Proposition : *soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. On suppose* $f \geq 0$*. Alors* $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$*.*

Exo : si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et si

$$^{\forall}x,\ f(x) > 0$$

alors $\int_a^b f > 0$.

Exo : *si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et si*

$$\forall x,\ f(x) > 0$$

alors $\int_a^b f > 0$.

Théorème : L'ensemble $\mathcal{I}([a,b])$ des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions bornées $[a,b] \to \mathbb{R}$. De plus,

$$\mathcal{I}([a,b]) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f$$

est linéaire.

Théorème : *L'ensemble $\mathcal{I}([a,b])$ des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions bornées $[a,b] \to \mathbb{R}$. De plus,*

$$\mathcal{I}([a,b]) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f$$

est linéaire.

Proposition : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Alors $|f|$ aussi et :

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Proposition : *soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Alors $|f|$ aussi et :*

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Contre-exemple : la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, -1 \text{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable mais $|f|$ l'est.

Contre-exemple : la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ -1 \text{ sinon}$$

n'est pas Riemann-intégrable mais $|f|$ l'est.

Théorème. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est Riemann-intégrable.