Définition. Soient E, F deux $K-$espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *linéaire* ou que f est un *morphisme*, si

- i) $^\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ET
- ii) $^\forall x \in E$, $^\forall \lambda \in K$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme.*

Homothéties. Pour tout $\lambda \in K$, l'application $E \to E$, $x \mapsto \lambda x$ est linéaire. C'est l'homothétie de rapport λ. *Notation* : $\lambda \mathrm{Id}_E$.

$$K[X] \to K[X],\ P(X) \mapsto P'(X)$$

$$K[X] \to K,\ P \mapsto P(0)$$

$$\mathscr{M}_n(K) \to K,\ M \mapsto \mathrm{Tr} M$$

Si $A \in \mathscr{M}_{mn}(K)$, alors

$$\mathscr{M}_{n1}(K) \to \mathscr{M}_{m1}(K),\ X \mapsto AX$$

est linéaire.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x+1$$

ne sont pas linéaires.

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$$

n'est pas $\mathbb{C}-$linéaire.

Exercice. Si f est linéaire alors $f(0) = 0$.

Proposition. Une application $f : K^n \to K$ est linéaire si et seulement s'il existe certains coefficients $a_1, ..., a_n \in K$ tels que :

$$^{\forall}x_1, ..., x_n \in K,\ f(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n \ .$$

Propriétés. Soit $\lambda \in K$. Si f, g sont des applications linéaires, alors

$$f + g,\ \lambda f,\ f \circ g$$

sont linéaires *(chaque fois que cela a un sens).*

Notation. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$. **Exercice.** $\mathscr{L}(E, F)$ est un $K-$espace vectoriel de dimension $\dim E \dim F$.

Soient E, F deux espaces vectoriels. Soit $e_1, ...e_n$ une base de E.
Soient $v_1, ..., v_n \in F$, alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour tout i.
C'est l'application définie par :

$$f(a_1 e_1 + ... + a_n e_n) = a_1 v_1 + ... + a_n v_n \quad .$$

Définition Une application linéaire bijective est un isomorphisme.
Remarque. si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi linéaire.
Notation. $E \simeq F$.

Exemple.

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$

$$(a, b) \mapsto a + ib$$

est un isomorphisme.
D'inverse :

$$(\mathrm{re}(z), \mathrm{im}(z)) \longleftarrow\!\shortmid z \quad .$$

Proposition. Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors :
f isomorphisme $\Leftrightarrow$ f envoie une base de E sur une base de F.

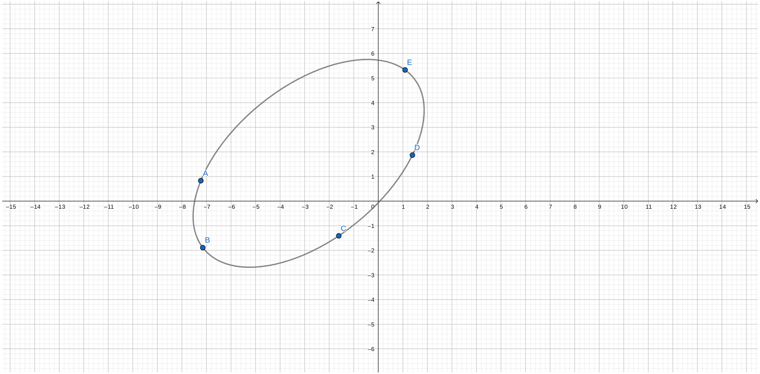
En particulier si f isomorphisme, $\dim E = \dim F$.
Remarque. En particulier, si $m \neq n$, $\mathbb{R}^m \not\simeq \mathbb{R}^n$.

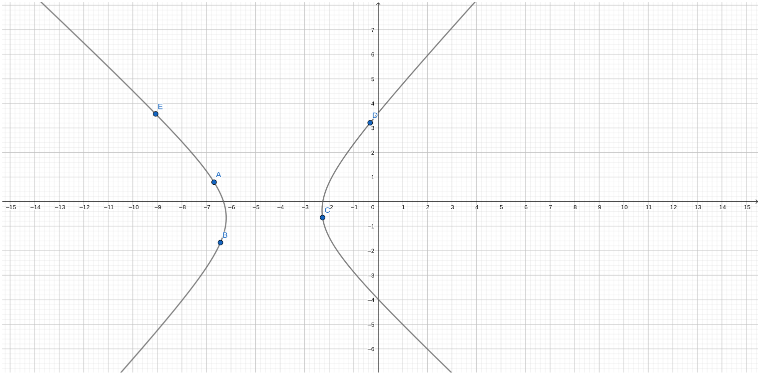
Exercice. Soit $f : E \to F$ linéaire.

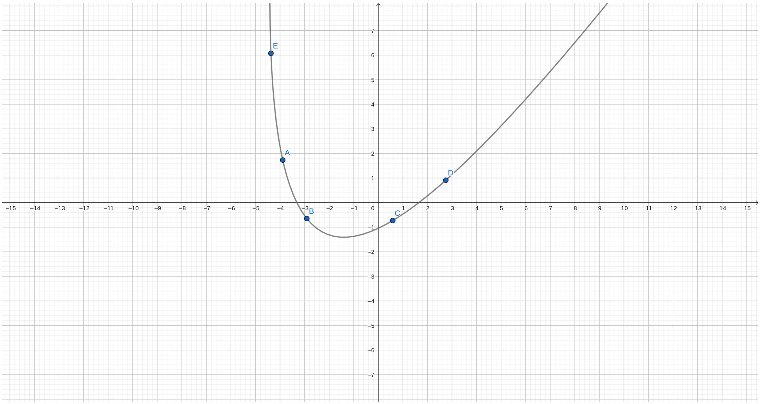
a) Si f est injective, alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.
b) Si f est sur jective, alors l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.
c) Si f est bijective, alors l'image par f d'une base de E est une base de F.

Exercice (suite). En particulier, si $f : E \to F$ est linéaire, alors f injective $\Rightarrow \dim E \leq \dim F$ et f est surjective $\Rightarrow \dim E \geq F$.

Exemples. Soient $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2), D(x_3, y_3), E(x_4, y_4)$ cinq points du plan $\mathbb{R}^2$. L'application $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$, $(a, b, c, d, e, f) \mapsto$
$(F_{abcdef}(x_0, y_0), F_{abcdef}(x_1, y_1), F_{abcdef}(x_2, y_2), F_{abcdef}(x_3, y_3), F_{abcdef}(x_4, y$
st linéaire non injective ! (où
$F_{abcdef}(X, Y) = aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f$).
Donc il existe toujours (au moins) une conique $\mathscr{C}$ qui passe par cinq points du plan quelconques. *Une conique est une courbe d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ où a, b, c, d, e, f sont des réels non tous nuls.*


A
B
C
D
E


E
A
B
C
D


E
A
B
C
D

Définition. Si $f : E \to F$ est linéaire, on pose

$$\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0) = \{x \in E \ : \ f(x) = 0\}\,,$$

c'est le *noyau de f*
et

$$\mathrm{Imf} := f(E) = \{y \in F,\ {}^{\exists}x \in E,\ f(x) = y\}\,,$$

c'est l'image de f.
Ce sont des sous-espaces vectoriels de E et de F, *respectivement*.

Plus généralement,
si $F_1 \leq F$, alors $f^{-1}(F_1) \leq E$
et si $E_1 \leq E$, alors $f(E_1) \leq F$.

Définition. Si $f : E \to F$ est linéaire, on pose $\mathrm{rang} f = \dim \mathrm{Im} f$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. **Proposition.** f injective $\Leftrightarrow \ker f = 0$.

Théorème du rang. $\dim E = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f$

Démonstration. Soit $G \leq E$ tel que $\ker f \oplus G = E$. Alors la restriction $f : G \to F$, $x \mapsto f(x)$ est injective donc $f : G \overset{\simeq}{\to} f(G)$ est un isomorphisme.
Or $f(G) = f(E)$ donc

$$\dim G + \dim \ker f = \dim E \Leftrightarrow \dim f(G) + \dim \ker f = \dim E$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(f) + \dim \ker f = \dim E \ .$$

Corollaire. Formule de Grassmann. Si $E_1, E_2 \leq E$, alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Proposition. Si $f : E \to F$ est linéaire, si $\dim E = \dim F$ est finie, ALORS :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Contre-exemples.

a) $K[X] \to K[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective mais non injective.

b) $K[X] \to K[X]$, $P \mapsto XP$ est injective non surjective.

Soient $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes 2 à 2 distincts.
Proposition. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ P(X) & \longmapsto & (P(z_0), ..., P(z_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Proposition. L'application : $\mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$$

est surjective.

Par exemple, $\frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = P(X+1) - P(X)$ avec $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_i}{i!} \frac{X^{n-i}}{(n-i)!}$.

Soit $\mathscr{F} = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ ^{\forall} n \geq 2,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\}$.

Proposition. L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (f_n) &\longmapsto (f_0, f_1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Soit $\mathscr{E} = \{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ y'' + y = 0\}$.
Proposition. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto & (y(0), y'(0)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Soit $F : E \to E$ linéaire.
Définition. On dit que f est une projection (ou un projecteur) si $f^2 = f$.

Exemple. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \, (x, y) \mapsto (4x - 2y, 6x - 3y)$
est une projection sur la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$ parallèlement à la droite d'équation $y = 2x$.

Proposition. Si f est un projecteur, alors $\ker f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$.

Exemples. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad r_\theta \quad} \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto ((\cos\theta)x - (\sin\theta)y, (\sin\theta)x + (\cos\theta)y)$$

rotation (de centre 0 *d'angle* θ*)*

Exemples. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad s_\theta \quad} \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto ((\cos\theta)x + (\sin\theta)y, (\sin\theta)x - (\cos\theta)y)$$

symétrie (orthogonale) d'axe Δ_θ.

Exercice.

$$s_\theta^2 = r_\theta.$$