Chapitre I. LES MATRICES

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition. Une *matrice* $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un « tableau » de nombres $\in \mathbb{K}$ à m lignes et n colonnes.
Notation :$\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de *taille* $m \times n$.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}), \ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Notation : si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note $A_{i,j}$ le coefficient de la ligne i et de la colonne j.

addition : $(A + B)_{i,j} = A_{ij} + B_{ij}$;

multiplication par un scalaire : $\lambda \in \mathbb{K}$:$(\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}$;

multiplication : si $A \in \mathscr{M}_{m,\boldsymbol{n}}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{n},p}(\mathbb{K})$,on définit $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$.On a $AB \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$.
« le coefficient (i, j) de la matrice AB est le **produit scalaire** de la ligne i de A par la colonne j de B. ».

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{c_{ij}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

où $c_{ij} = a_{i1}b1j + ... + a_{in}b_{np}$.

ATTENTION : si $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$, $n \neq p$, alors AB n'est pas défini.

$$(10)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1,\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(10)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re} z & -\mathrm{Im} z \\ \mathrm{Im} z & \mathrm{Re} z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re} z' & -\mathrm{Im} z' \\ \mathrm{Im} z' & \mathrm{Re} z' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(zz') & -\mathrm{Im}(zz') \\ \mathrm{Im}(zz') & \mathrm{Re}(zz') \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

Voici 3 exemples de matrices de taille $n+1 \times n+1$:

$$T_{\_} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 1 & n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \leq i,j \leq n}$$

$$
T^{+} := \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\
\vdots & & 1 & 3 & 6 & & \vdots \\
\vdots & & & 1 & 4 & & \vdots \\
\vdots & & & & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{pmatrix} = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}
$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & n+1 \\ 1 & 3 & 6 & & & & \\ 1 & 4 & & \ddots & & & \\ 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & n+1 & & & & & \binom{2n}{n} \end{pmatrix} = \left(\binom{i+j}{i}\right)_{0 \le i,j \le n}$$

Alors $T_- T^+ = P$.

À retenir :« le coefficient (i, j) de la matrice AB est le *produit scalaire* de la ligne i de A par la colonne j de B. ».

— Effet de la multiplication à gauche ou à droite par une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & \dots & d_1 a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_n a_{n,1} & & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & \dots & d_n a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_1 a_{n,1} & & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Définition La matrice identité, notée I_n est une matrice carrée $n \times n$:

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

« Des 1 sur la diagonale, des 0 en dehors ».

Propriétés :

$$^{\forall}A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}),\ AI_n = A$$

$$^{\forall}A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}),\ I_m A = A\ .$$

Propriétés du produit.

i) **distributivité :** $A(B+\lambda C) = A + \lambda BC$ si $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}), B, C \in \mathscr{M}np(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K}$, $(A+\lambda B)C = AC + \lambda BC$ si $A, B \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}np(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

ii) **associativité :** $A(BC) = (AB)C$ si $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

Démonstration. ii) :
$(A(BC))_{ij} = \sum_k A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_k \sum_l A_{ik}B_{kl}C_{lj}$ et
$((AB)C)_{ij} = \sum_l (AB)_{il}C_{lj} = \sum_l \sum_k A_{ik}B_{kl}C_{lj}$. Donc
$(A(BC))_{ij} = ((AB)C)_{ij}$.

Exemple des fractions continues. Soient $a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}$. On suppose $a_1, ..., a_n \geq 1$. On pose :

$$r_0 = a_0,\ r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, ..., r_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}}\ .$$

Chaque fraction $r_k = \frac{p_k}{q_k}$où p_k, q_k sont premiers entre eux.

Si on pose $A_k = \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = A_n A_{n-1} ... A_0 \ .$$

La suite de Fibonacci
C'est la suite :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$$

$$f_0 := 0, f_1 := 1, {}^{\forall} n \geq 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Problème : exprimer f_n en fonction de n.

Solution : On pose : A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On montre que :

$$^{\forall} n \geq 1,\ A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} \ .$$

(exo : par récurrence ...)

Définition :(Matrices inversibles (pour le produit)) Une matrice $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est inversible **à droite** s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_{nm}(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_m$.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est inversible **à gauche**s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_{nm}(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$.

Notation. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors il existe **une unique** matrice Btelle que $AB = I_n = BA$.On note $B = A^{-1}$.

Théorème.

i) si $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est inversible à droite, alors $m \leq n$.

ii) si $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est inversible à gauche, alors $n \leq m$.

iii) si $A, B \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$, alors $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$ *(admis)*.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ alors $A^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} & -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} & 1 \\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} & \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A, B sont inversibles alors AB aussi et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \ .$$

Définition. Dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, les matrices élémentaires sont les matrices $E_{i,j} = \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots\cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right)$ où $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

« 1 » en position (i, j), « 0 » ailleurs.

Exercice. $E_{ij}E_{kl} = E_{il}$ si $j = k$, 0 si $j \neq k$.

Définition ${}^t(A)_{i,j} := A_{j,i}$
« Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A (et vice versa) ».

Propriétés : Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, pour toutes matrices A, B,

$$ {}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A,\ {}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B\ ,\ {}^t(AB) = {}^t B {}^t A\ ,\ {}^{tt}A = A\ . $$

Définition. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si${}^t A = A$,antisymétrique si${}^t A = -A$.

Exemples. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Définition. Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est échelonnée si les deux conditions suivantes sont vérifiées : (i) « les lignes nulles sont à la fin » *c-à-d* :il existe $0 \leq r \leq m$ tel que les lignes (a_{i*}) sont non nulles si $0 \leq i \leq r$ et nulles si $r + 1 \leq i \leq n$.

(ii) « la matrice est en escaliers » au sens où si on note pour tout $1 \leq i \leq r$, a_{ij_i} le premier coefficient non nul de la ligne i, alorsla suite

$$j_1 < ... < j_r$$

croît strictement.

Une matrice échelonnée est de la forme :

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont échelonnées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ne le sont pas.

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ sontéchelonnées

réduites.

Définition. Une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice est une transformation d'un des trois types suivants :
(I) ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un coefficient $\in K$ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$, $\lambda \in K$;

(II) échanger 2 lignes $L_i \leftrightarrow L_j$;
(III) multiplier une ligne par un coefficient non nul $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$.

Exercice. Les opérations élémentaires sont le résultat de la multiplication**à gauche** par (I)

$$T_{ij}(\lambda) := \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{M}_m(K)$$

(1 *sur la diagonale,* λ *en position* (i, j) *des* 0 *ailleurs)* (une matrice de transvection) ;

$$\textbf{(II)}\ P_{ij} := \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} & & i & & & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{1} & & \\ & & & \mathbf{1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mathbf{1} & & & \\ & & \mathbf{1} & & & & \mathbf{0} & & \\ & & & & & & & \mathbf{1} & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{M}_m(K)$$ **la matrice I_m où l'on a échangé les colonnes i et j ;**

(III) $D = \mathrm{diag}(1, ..., \lambda, ...1)$.

De plus chacune de ces matrices est inversible et :

$$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda),\ P_{ij}^{-1} = P_{ij},\ D^{-1} = \mathrm{diag}(1, ..., \lambda^{-1}, ...1)\ .$$

Théorème-définition. Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$. On peut transformer A en une matrice échelonnée en un nombre fini d'opérations élémentaires. Le résultat est une matrice échelonnée à r lignes non nulles pour un certain $0 \leq r \leq m$.
Le nombre r ne dépend que de la matrice A, c'est le rang de la matrice.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m le nombre de lignes de A.
Si $m = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $m > 1$, soit j_1 la première colonne non nulle de A. Quitte à échanger la 1ère ligne avec une ligne i où le coefficient $a_{ij_1} \neq 0$, on peut supposer que $a_{1,j_1} \neq 0$.

Après les opérations : $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} L_1$ pour $1 < i \leq m$, on obtient une matrice :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & \dots & a_{1j_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A' \end{array} \right)$$

où A' est une matrice de taille $m - 1 \times n - j_1$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence ...

Exemple.

Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$. On peut transformer A en une matrice échelonnée réduite en un nombre fini d'opérations élémentaires.

Calcul de l'inverse.
Théorème. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible $\Leftrightarrow$ A est de rang n.

Démonstration. $\Rightarrow$: exercice ...
$\Leftarrow$: par des opérations élémentaires sur les lignes on peut transformer A en l'identité. Donc il existe P inversible telle que

$$PA = I_n \ .$$

Alors A est inversible d'inverse $A^{-1} = P$.En particulier on retrouve A^{-1} en appliquant les mêmes opérations sur les lignes de la matrice A à la matrice I_n.

Exemple.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Corollaire

Un système est équivalent à un système échelonné.

Soit S un système linéaire de m équations à n inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & ... & \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ sa matrice et
$\widetilde{A} = (a_{ij}|b_i)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$ sa matrice étendue.

Notons r le rang des lignes de A et $\widetilde{r}$ celui de $\widetilde{A}$. Il est clair que $\widetilde{r} = r$ ou $r + 1$.

Proposition.
a) Si $\widetilde{r} = r + 1$, alors le système n'a pas de solutions.b) Si $\widetilde{r} = r = n$, alors le système a une unique solution.

c) Si $\widetilde{r} = r < n$, appelons $j_1, ..., j_r$ les indices des pivots.On appellera $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$ les variables principales et les autres variables seront appelées variables libres. Il existe des coefficients $d_1, ..., d_r$, des coefficients $c_{i,k}$, $\leq i \leq r$, $1 \leq k \leq n$, $k \notin \{j_1, ..., j_r\}$ tels que les solutions du système sont les $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant :

$$^\forall i,\ x_{j_i} = \sum_{k \in \mathscr{L}} c_{ik} x_k$$

où $\mathscr{L} := \{1, ..., n\} \ \setminus \ \{j_1, ..., j_r\}$. En particulier il y a strictement plus d'une solution et même un nombre infini si K l'est.

Démonstration. Si $\widetilde{r} = r + 1$, alors on peut transformer le système en un système échelonné où la ligne $r + 1$ est de la forme : $0x_1 + ... + 0x_n = b_{r+1}$ pour un $b_{r+1} \neq 0$. Un tel système n'a pas de solution.

Si $\widetilde{r} = r < n$ ... Voici un exemple :

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = & 2 \\ x_2 + x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & -x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

x_1, x_2, x_4 sont les variables principales et x_3 la variable libre.

Le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 + 8 \\ x_2 & = & -x_3 - 3 \\ x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

<u>**Q.e.d.**</u>

Théorème. Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(K)$ avec $m < n$ (il y a plus d'inconnues que d''équations), alors il existe $x_1, ..., x_n$ non tous nuls tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + ... + A_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \\ A_{m1}x_1 + ... + A_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Démonstration : (exo) *q.e.d.*

Définition. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\mathrm{tr}(A) = A_{11} + A_{22} + ... + A_{nn} \quad .$$

Propriétés. $^\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $^\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$.

Exercice. Soient $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{nm}(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \ .$$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^{N-k} B^k \ .$$

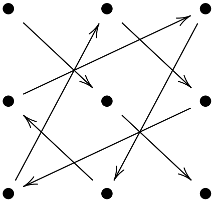
Déterminants

Cas $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$. On pose

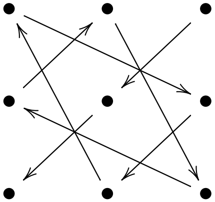
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} := a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Cas 3×3. $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$

$:= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{1,3}a_{2,2} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$



$+$



$-$

Cas $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$.

On admettra que $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\left(A^{ij}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\left(A^{ij}\right)$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$

Exercice.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 \ .$$

Théorème. (i) $\det(I_n) = 1$;(ii)
$^\forall A,\, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(AB) = \det(A)\det(B)$;

(iii) si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Démonstration dans le cas 2×2.

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{vmatrix}$$

$$= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') = \dots = (ad - bc)(a'd' - b'c')$$

si $AB = I_n$, alors
$\det(AB) = \det(I_n) \Rightarrow \det A \det B = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$.

Cas 2×2. On a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

donc si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$D = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega' \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega' \end{pmatrix}$. On a : $AP = PD$.

suite. Donc $A = PDP^{-1}$. Donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Or,
$D^n = \begin{pmatrix} \omega^n & 0 \\ 0 & \omega'^n \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{\omega' - \omega} \begin{pmatrix} \omega' & -1 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $f_n = \frac{\omega^n - \omega'^n}{\omega - \omega'} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Cas général. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$. Si $\det A \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\widetilde{A}$$

où $\widetilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{ij}$. Rappelons que :

$$A^{ij} = \left(\begin{array}{ccccc} & & \cancel{a_{1j}} & & \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ \cancel{a_{i1}} & \times\times\times\times\times\times & \cancel{a_{ij}} & \times & \cancel{a_{in}} \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ & & \cancel{a_{nj}} & & \end{array} \right) \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ alors

$\det A = 1.5.10 + 4.8.3 + 2.6.7 - 7.5.3 - 8.6.1 - 10.2.4 = \ -3.$

Et $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ d'où ${}^t\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

$$\text{et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$