Rappel

Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(K)$. ALORS

$$\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

$$X \mapsto AX$$

est une application linéaire.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

$$\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

matrice d'une application linéaire

Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire.
Soient $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $f = (f_1, ..., f_m)$ une base de F.
$^\forall 1 \leq j \leq n$, $^\exists$, $a_{1j}, ..., a_{mj} \in \mathbb{K}$, $\phi(e_j) = a_{1j} f_1 + ... + a_{mj} f_m$.

Définition : on note

$$[\phi]_f^e = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$$

la matrice obtenue.
C'est la matrice de ϕ dans les bases e et f.

Si $E = F$ et $e = f$, on note simplement

$$[\phi]_e = [\phi]_e^e \ .$$

Exemples

Soit $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P'(X)$. Soit e la base formée des polynômes $1, X, X^2, ..., X^n$. Alors :

$$[D]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Si e' est la base formée des polynômes $1, X, \frac{X^2}{2}, ..., \frac{X^n}{n!}$, alors

$$[D]_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Si $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1)$, alors si $e = (1, X, ..., X^n)$:

$$[\phi]_e = \left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemples

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x + y)$. Soit $e = ((1, 0), (0, 1))$.
Alors :

$$[\phi]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exemples (suite)

Soit $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ (et de centre 0). Alors :

$$[R_\theta]_e = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Exemples (suite)

Soit $s_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale d'axe la droite qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses. Alors :

$$[s_\theta]_e = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} .$$

Exercice. $s_{\theta'} s_\theta = R_{\theta'-\theta}$.

Soit $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in E$, soit $y = y_1 f_1 + ... y_m f_m \in F$.
On pose :

$$[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \; et \; [y]_f = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \ .$$

Proposition : On a :

$$[\phi(x)]_f = [\phi]_f^e [x]_e \ .$$

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit F un espace vectoriel de dimension m.

Proposition. Soient e une base de E et f une base de F. L'application :

$$\mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{M}_{mn}(K)$$

$$\phi \mapsto [\phi]_f^e$$

est un isomorphisme.

En particulier, $\dim_K \mathscr{L}(E, F) = mn = \dim E . \dim F$*.*

Proposition : Soient $\phi : E \to E'$ et $\phi' : E' \to E''$ des applications linéaires. Soient e, e', e'' des bases de E, E', E'' *respectivement*. ALORS $\phi' \circ \phi : E \to E''$ est linéaire et :

$$[\phi' \circ \phi]^{e}_{e''} = [\phi']^{e'}_{e''}[\phi]^{e}_{e'} \quad .$$

Proposition. En particulier si $\phi : E \to F$ est un isomorphisme, alors la matrice $[\phi]_f^e$ est inversible d'inverse $[\phi^{-1}]_e^f$.

Matrices de passage

Définition : soient e, e' deux bases d'un même espace vectoriel E de dimension n. La matrice

$$P_e^{e'} = [Id_E]_e^{e'} \in \mathscr{M}_n(K)$$

est appelée matrice de passage de la base e dans la base e'.

À RETENIR ! ! !

Proposition. Soient e, e' deux bases d'un même espace vectoriel E. Soit $v = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = x'_1 e'_1 + ... + x'_n e'_n \in E$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $P = P_e^{e'}$. ALORS

$$X = PX' \ .$$

Proposition. La matrice $P_e^{e'}$ est inversible d'inverse $P_{e'}^{e}$.
Démonstration. soient e_1, e_2, e_3 *trois bases d'un même espace vectoriel* E *de dimension* n. *Alors on vérifie facilement que* $P_{e_1}^{e_2} P_{e_2}^{e_3} = P_{e_1}^{e_3}$. *De plus* $P_e^e = I_n$.

Exemple

Soient $e = ((1,0),(0,1))$ et $e' = ((1,\delta),(1,\delta'))$ où

$$\delta = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \delta' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Alors e et e' sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et :

$$P_e^{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta' \end{pmatrix}$$

Matrices de Vandermonde

Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit $e = (1, X, ..., X^{n-1})$. Soit $f = (L_1(X), ..., L_n(X))$ où : $a_1, ..., a_n$ sont des réels deux à deux distincts et :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} \frac{X - a_k}{a_i - a_k} \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \ .$$

On peut vérifier en exercice que e et f sont des bases de E.

Vandermonde (suite)

Alors :

$$P_f^e = V(a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Par exemple : $V(a_1, a_2, a_3)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{a_2 a_3}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} & \frac{a_1 a_3}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} & \frac{a_1 a_2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \\ -\frac{a_2+a_3}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} & -\frac{a_1+a_3}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} & -\frac{a_1+a_2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \\ \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} & \frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} & \frac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \end{pmatrix} .$$

Définition : On dit que deux matrices $M, M' \in \mathscr{M}_{mn}(K)$ sont équivalentes s'il existe $P \in GL_m(K)$ [*], $Q \in GL_n(K)$ [†] telles que :

$$M' = PMQ$$

---

*. *c-à-d* P matrice inversible de taille m.

†. *c-à-d* Q matrice inversible de taille n.

Exercice : les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes.

Proposition : si $A \in \mathscr{M}_{mn}(K)$ est de rang r alors il existe $P \in GL_m(K)$, $Q \in GL_n(K)$ telles que :

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \ .$$

Proposition : soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. Soient e, e' deux bases de E et f, f' deux bases de F. ALORS :

$$[\phi]_{f'}^{e'} = P_{f'}^{f} [\phi]_{f}^{e} P_{e}^{e'}$$

En particulier si $E = F$,

$$[\phi]_{e'} = P_{e'}^{e}[\phi]_e P_e^{e'} \quad .$$

si on pose : $P = P_e^{e'}$, $A = [\phi]_e$, $A' = [\phi]_{e'}$, alors $A' = P^{-1}AP$.

Exemples

Dans $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} P$$

$$\text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{n!} \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

Proposition. Soit $\ell : E \to F$ linéaire. On suppose que e est une base de E et f une base de F. On note $A = [\ell]_e^f$. Alors $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(\ell)$.
Démonstration. Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de la matrice A.
Alors $\mathrm{rang} A = \dim \mathrm{Vect}\{C_1, ..., C_n\} = \dim \mathrm{Vect}\{\ell(e_1), ..., \ell(e_n)\} = \dim \mathrm{Im} \ell = r$.

Définition : on dit que deux matrices $M, M' \in \mathscr{M}_n(K)$ sont semblables si

$$M' = P^{-1}MP$$

pour une certaine matrice $P \in GL_n(K)$.

Exemple

Soit

$$E = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ : \ y'' + y = 0\} \ .$$

C'est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension 2 de base $\cos, \sin$.

Notons $D : E \to E,\ y \mapsto y'$.

$$[D]_{cos,sin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} et [D]_{e^{ix},e^{-ix}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

Exercice. Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ sont semblables.

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Définition. On note $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}([f]_e)$ où e est une base quelconque de E.
Remarque. Si e' est une autre base de E, alors $\mathrm{tr}([f]_e) = \mathrm{tr}([f]_{e'}$.
En effet, si on pose $P = P_e^{e'}$, alors
$\mathrm{tr}([f]_e) = \mathrm{tr}(P[f]_{e'}P^{-1}) = \mathrm{tr}([f]_e)$.

Exercice. Si p est une projection, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}\,(p)$. Indication. Choisir une bonne base ...

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Définition. On note $\det(f) = \det([f]_e)$ où e est une base quelconque de E.
Remarque. Si e' est uneautre base de E, alors $\det([f]_e) = \det([f]_{e'})$.