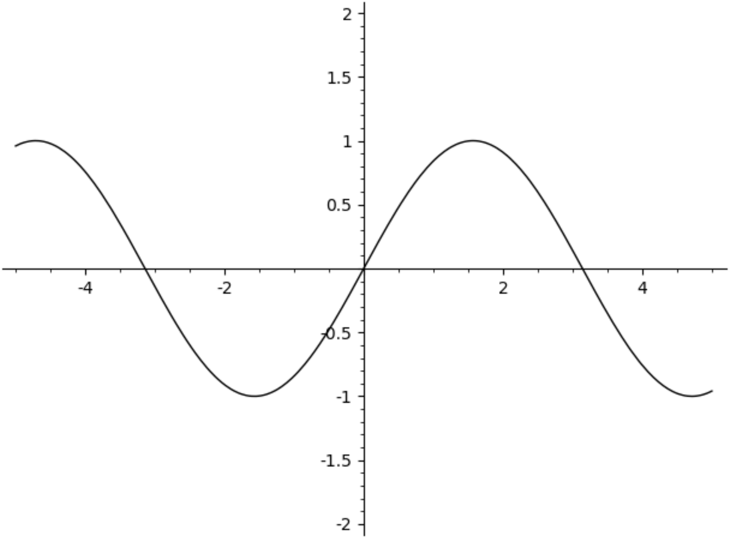

2
1.5
1
0.5
-4
-2
2
4
-0.5
-1
-1.5
-2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Définition : On note $f^{(0)} := f$. Si $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. On pose alors

$$f'(a) := f^{(1)}(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

Puis par récurrence sur $n \geq 2$, on dit que f est $n-$fois dérivable en a s'il existe un intervalle ouvert $a \in J \subseteq I$ telle que f est $n-1$ fois dérivable en tout point de J et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a ; on note alors

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a) \ .$$

Exemples.

$$\forall n \geq 0,\ \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$\forall n \geq 1,\ (\arctan x)^{(n)} = \frac{i(n-1)!}{2}\left(\frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n}\right)$$

Définition. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, on dit que f est $\mathscr{C}^\infty$.
Remarque. $\mathcal{C}^0$ signifie continue.

Exemples. Les polynômes, $x \mapsto e^x$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Proposition. [Formule de Leibniz] Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient f, g sont des fonctions $I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$. Si $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent, ALORS fg est $n-$fois dérivable en a et :

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(a) \ .$$

Démonstration.

Récurrence sur n. Rappelons que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et que :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Définition. On dit que f a un maximum relatif en c s'il existe un intervalle ouvert $c \in I \subseteq [a, b]$ tel que ${}^{\forall}x \in I,\ f(x) \leq f(c)$.

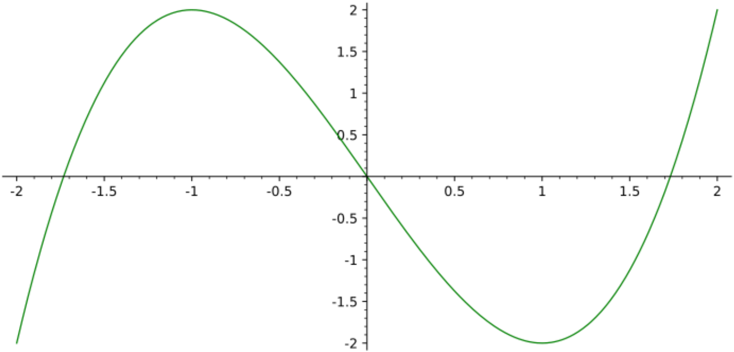
Proposition. Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admet un extremum relatif en $a < c < b$ et si $f'(c)$ existe alors $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si par exemple f a un maximum relatif en c, alors

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \ .$$

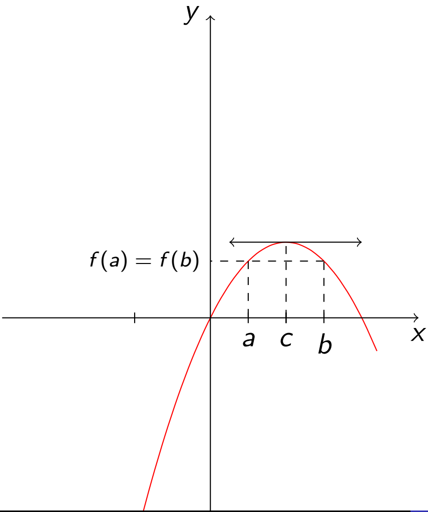
Même raisonnement avec un minimum relatif ...

Exemple. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x$ a deux extrema relatifs, en $x = -1$ et en $x = 1$.



Théorème de Rolle. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, si $f(a) = f(b)$, ALORS il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.

Illustration du théorème de Rolle



Pour la démonstration, on utilise le :

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *une application continue, alors il existe* $m, M \in \mathbb{R}$ *tels que :*

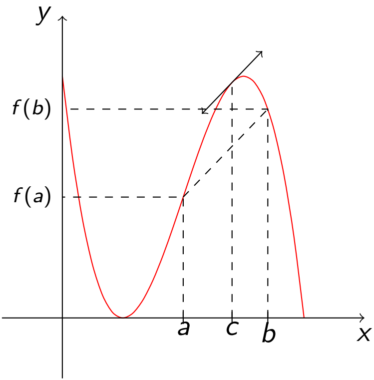
$$f([a, b]) = [m, M]$$

ADMIS.

démonstration du théorème de Rolle

Théorème des accroissements finis.
Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ ALORS il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Illustration du théorème des accroissements finis



Démonstration.
On considère

$$g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad .$$

On a $g(a) = g(b)$ et $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Et on applique le théorème de Rolle à la fonction g ...

Corollaire. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.
ALORS :

a) la fonction f est croissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f' \geq 0$;
b) la fonction f est décroissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f' \leq 0$;
c) la fonction f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Théorème des accroissements finis généralisés.
Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, alors il existe $a < c < b$ tel que
$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction H définie par :

$$H(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) \dots$$

Corollaire. Règle de L'Hospital.
Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = 0 = lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} g(x)$, et si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe, alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Autre version : Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)$, si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe, alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \ .$$

Démonstration.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall a < t < a+\eta, \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - l \right| < \epsilon \ .$$

Soit $a < x < a + \eta$. D'après le théorème des accroissements finis généralisé, il existe $a < y_x < x$ tel que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} \ .$$

On a alors $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} - l\right| < \epsilon$. **Q.e.d.**

Théorème. Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On suppose que f est $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. ALORS il existe $a < c < b$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$$

Applications.

$$\left|e^{0,5} - (1 + 0,5 + \frac{(0,5)^2}{2} + \frac{(0,5)^3}{6} + \frac{(0,5)^4}{24})\right| < \frac{2 \times (0,5)^5}{120}$$

$$< 0,000521$$

$$\left|\sin(0,5) - \left(0,5 - \frac{(0,5)^3}{6} + \frac{(0,5)^5}{120}\right)\right| < \frac{(0,5)^7}{5040}$$

$$< 0,0000016$$

$$\left|\cos(3) - \left(-1 + \frac{(\pi-3)^2}{2} - \frac{(\pi-3)^4}{24}\right)\right| \leq \frac{(\pi-3)^6}{720}$$

$$< 0,00000000119$$

$$\left|\sqrt{1,1} - \left(1 + \frac{0,1}{2} - \frac{0,01}{8} + \frac{0,003}{8}\right)\right| < \frac{0,0001}{24} \times \frac{3 \times 5}{2^4} < 0,0000042$$

Démonstration de la formule de Taylor-Lagrange. Posons
$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \dots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$
où A est une constante choisie pour que $g(a) = 0$. Il suffit de poser
$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b) - f(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right)$.

On applique le théorème de Rolle à g : il existe $a < c < b$ tel que $g'(c) = 0$.
Or

$$g'(c) =$$

$$-f'(c) + f'(c) - (b-c)f''(c) + ... + \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c)$$

$$-\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) + A\frac{(b-c)^n}{n!}$$

$$= -\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) + A\frac{(b-c)^n}{n!}$$

donc $g'(c) = 0 \Leftrightarrow A = f^{(n+1)}(c)$. **Q.e.d.**

Exemples.

a) $^{\forall}x \geq 0,\ x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x - x^2/2 + x^3/3.$

b) $^{\forall}x \in \mathbb{R},\ 1 - x^2/2 \leq \cos x \leq 1 - x^2/2 + x^4/24.$

c) $^{\forall}x \geq 0,\ 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$

Applications.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$^{\forall}x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$^{\forall} -1 < x < 1,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$\forall -1 \leq x \leq 1, \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

« *Contre-exemple.* » La fonction $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^k x)}{k!}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais, pour tout $x \neq 0$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$ diverge.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Définition. On dit que f est *convexe* si
$^{\forall}0 \leq t \leq 1, \, ^{\forall}x, y \in I, \; f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$

Exemple. $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors :

$$^\forall n \in \mathbb{N},\ ^\forall t_1, ..., t_n \geq 0,\ t_1 + ... + t_n = 1,\ ^\forall x_1, ..., x_n \in I,$$

$$f(t_1 x_1 + ... + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + ... + t_n f(x_n)\ .$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Théorème. Sont équivalentes :

i) f est convexe.

ii) $^\forall x, y \in I,\ f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$.

iii) $^\forall x < y < z \in I,\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

iv) f' est croissante sur I.

v) f'' est positive sur I.

$iii \Rightarrow ii$: fixer $z > y$, faire tendre x vers y ...
$ii \Rightarrow i$: poser $z = tx + (1-t)y$ puis appliquer ii à y et z et à x et z.
$i \Rightarrow v$: utiliser $f''(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$

Exemple. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Application.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1, ..., x_n > 0,\ (x_1 ... x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

inégalité arithmético-géométrique.

Théorème. Formule de Taylor avec reste intégral. Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, ALORS

$$f(b) =$$

$$f(a)+(b-a)f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

Démonstration. Récurrence sur n et intégration par parties ...

Théorème. Formule de Taylor-Young. Si f est $n-$fois dérivable en a, ALORS

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n) \ .$$

Démonstration. Déjà fait ! (en utilisant la règle de L'Hospital, *cf.* le cours sur les dl)

Théorème.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration de la formule de Stirling

Lemme.

$$\forall -1 < x < 1,\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Lemme.

$$\forall n \geq 1,$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots$$

En particulier,

$$0 \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad .$$

On pose $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. On a :

$$0 \leq \ln u_n - \ln u_{n+1} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Donc la suite

$$\ln u_n$$

converge ...

Posons

$$k = \lim u_n$$

de sorte que

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad .$$

On admet que :

$$\lim_n \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi$$

On trouve alors :

$$k = \sqrt{2\pi} \ .$$