

Fondamentaux des mathématiques II

0.1 Trace

La trace d'une matrice carrée A est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{i,i} .$$

Proposition 0.1.1 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$, alors $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

0.2 Déterminant

0.2.1 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\det A = |A| := ad - bc$.

Propriétés :

i) $\det AB = \det A \det B$;

ii) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible et dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

0.2.2 3×3

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, on pose

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{21}a_{32} .$$

Propriétés :

i) $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$;

- ii) $\det {}^t A = \det A$;
- iii) si A a deux lignes ou deux lignes égales, alors $\det A = 0$;
- iv) $\det AB = \det A \det B$;
- v) $\det A = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} |A^{ij}| = \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} |A^{ij}|$ où A^{ij} est la matrice 2×2 obtenue en barrant la ligne i et la colonne j .

Ces propriétés se démontrent directement à partir de la formule de définition; pour la multiplicativité, les calculs sont un peu longs mais pas trop ...

Définition 1 (la comatrice) On pose $\tilde{A} := ((-1)^{i+j} |A^{ij}|)_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Lemme 0.2.1 On a toujours :

$$A {}^t \tilde{A} = {}^t \tilde{A} A = \det A I_3$$

Démonstration : On a :

q.e.d.

Théorème 0.2.2 Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

0.3 Matrices équivalentes et matrices semblables

Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, alors A, B sont équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{M}_m(K)$ et $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ inversibles telles que $A = PBQ$.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, alors A, B sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{M}(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Remarques :

a) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont équivalentes car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) si A, B sont semblables, alors $\text{tr} A = \text{tr} B$ (car $\text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr} B$). En particulier les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

c) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

0.4 Exemple d'application

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ si $n \geq 1$.

Alors $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$. En effet, on pose $X_n := \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ si

$n \geq 0$ et $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De sorte que : $X_{n+1} = AX_n$. Donc, $X_n = AX_0 =$

$A^t(0, 1)$ = la deuxième colonne de A .

Or, $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \delta' \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$, $\delta := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ et $\delta' := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Par conséquent, $A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \delta^n & 0 \\ 0 & \delta'^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} ? & \delta^n - \delta'^n \\ ? & \delta^{n+1} - \delta'^{n+1} \end{pmatrix}$.

D'où le résultat

Chapitre 1

Espaces vectoriels [4]

Chapitre 2

Applications linéaires [5]

Chapitre 3

Réels [1/2]

Chapitre 4

Fractions rationnelles [1]

Chapitre 5

Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques usuelles [1]

Chapitre 6

Intégration [4+1/2]

Chapitre 7

Développements limités [3]

Chapitre 8

Équations différentielles [2]

Chapitre II

Espaces vectoriels

1. Corps.

Définition :

Un corps (

1 Comment résoudre un système linéaire ?

Un système de m équations linéaires à n inconnues x_1, \dots, x_n est de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

On appellera $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ la matrice du système et $\tilde{A} := (A|b_i)$ sa matrice étendue.

Pour résoudre un tel système on peut utiliser la méthode de l'*élimination de Gauss*.

Définition 1 Une transformation élémentaire du système est une transformation d'un des types suivants :

- (i) ajouter à une équation un multiple d'une autre équation ;
- (ii) échanger deux équations ;
- (iii) multiplier une équation par un nombre non nul.

Remarque : une transformation élémentaire du premier type ne modifie qu'une équation (celle à qui un multiple d'une autre est ajouté).

Clairement, une solution du système est aussi une solution du système obtenu après une opération élémentaire. Or Ces opérations élémentaires sont réversibles, le système de départ peut être retrouver à partir de celui d'arrivée par une opération élémentaire du même type. Par exemple, si on applique $L_i \leftarrow L_i + cL_j$, $i \neq j$, $c \neq 0$, on obtient une nouvelle ligne L'_i et les autres lignes ne changent pas. Si on applique $L'_i \leftarrow L'_i - cL_j$ on retrouve le système dont on est parti. Donc le système obtenu après une ou plusieurs opérations élémentaires est équivalent.

Exemple :

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 2x_3 + x_4 & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 2 \\ -3x_2 - 3x_3 + 3x_4 & = & -6 \\ -4x_2 - 4x_3 + x_4 & = & -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\
L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \\
\iff
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\
x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\
0 = 0 \\
-3x_4 = 5
\end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
L_3 \leftrightarrow L_4 \\
\iff
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\
x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\
x_4 = -5/3
\end{array} \right.$$

On arrive à un *système échelonné* i.e. sa matrice étendue l'est.
Qu'est-ce qu'une matrice échelonnée? ...

2 Matrices échelonnées

Le premier coefficient non nul d'une ligne $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ non nulle est appelé son *pivot*. L'indice du premier coefficient non nul est l'*indice* du pivot.

Définition 2 (Matrice échelonnée) On dit qu'une matrice A est échelonnée si :

- i) les indices des pivots des lignes non nulles forment une suite strictement croissante ;
- ii) les lignes nulles si elles existent sont « en bas ».

Une matrice échelonnée est donc de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
& a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
& & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
& & & & a_{rj_r} & \dots & \dots \\
\hline
& & & & & & \dots \\
\hline
& & & & & & \dots
\end{array} \right)$$

où les coefficients $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ sont non nuls et les coefficients à gauche $a_{kj}, j < j_k$ et en dessous $a_{i,j_k}, i > k$ sont tous nuls.

Comme pour les systèmes d'équations linéaires, on définit les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur m le nombre de lignes de A .

Si $m = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $m > 1$, soit j_1 la première colonne non nulle de A . Quitte à échanger la 1ère ligne avec une ligne i où le coefficient $a_{ij_1} \neq 0$, on peut supposer que $a_{1j_1} \neq 0$. Après les opérations :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} L_1$$

pour $1 < i \leq m$, on obtient une matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1j_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A' \end{pmatrix}$$

où A' est une matrice de taille $m - 1 \times n - j_1$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence ... q.e.d.

3 Comment résoudre un système échelonné ?

Corollaire 3.0.1 *Un système est équivalent à un système échelonné.*

Soit S un système échelonné. On note A sa matrice et \tilde{A} sa matrice étendue. Bien entendu, A est aussi échelonnée. Notons r le nombre de lignes non nulles de A et \tilde{r} celui de \tilde{A} .

Il est clair que $\tilde{r} = r$ ou $r + 1$.

Proposition 3.1 a) *Si $\tilde{r} = r + 1$, alors le système n'a pas de solutions.*

b) *Si $\tilde{r} = r = n$, alors le système a une unique solution.*

c) *Si $\tilde{r} = r < n$, appelons j_1, \dots, j_r les indices des pivots. On appellera x_{j_1}, \dots, x_{j_r} les variables principales et les autres variables seront appelées variables libres. Il existe des coefficients d_1, \dots, d_r , des coefficients $c_{i,k}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq k \leq n$, $k \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ tels que les solutions du système sont les (x_1, \dots, x_n) vérifiant :*

$$\forall i, x_{j_i} = \sum_{k \in \mathcal{L}} c_{ik} x_k$$

où $\mathcal{L} := \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$. En particulier il y a strictement plus d'une solution et même un nombre infini si K l'est.

Démonstration : Si $\tilde{r} = r + 1$, alors la ligne $r + 1$ est de la forme : $0x_1 + \dots + 0x_n = b_{r+1}$ pour un $b_{r+1} \neq 0$. Un tel système n'a pas de solution.

Si $\tilde{r} = r < n$... Voici un exemple :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ -x_4 & = 5 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_4 sont les variables principales et x_3 la variable libre. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 8 \\ x_2 = -x_3 - 3 \\ x_4 = -5 \end{cases}$$

q.e.d.

Théorème 3.2 Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ avec $m < n$ (il y a plus d'inconnues que d'équations), alors il existe x_1, \dots, x_n non tous nuls tels que

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = 0 \\ \vdots = 0 \\ A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Démonstration : (exo)

q.e.d.

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

4 Corps

Soit K un corps.

5 Additions et multiplication par un scalaire dans K^n

Si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$, alors on pose $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Si $\lambda \in K$, on pose $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

On notera 0 le vecteur $(0, \dots, 0)$.

Propriétés : pour tous $x, y \in K^n, \lambda, \mu \in K$, on a :

- a) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
- b) $1x = x$.
- c) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
- d) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
- e) $0x = 0$.

6 Sous-espaces vectoriels de K^n

Définition 4 (sous-espace) On dit que $E \subseteq K^n$ est un sous-espace de K^n si E est non vide, si $\forall x, y \in E, x + y \in E$ et si $\forall x \in E \forall \lambda \in K, \lambda x \in E$.

Notation : $E \leq K^n$. Plus généralement, si $F \subseteq E$ est aussi un sous- K -space vectoriel de K^n , on notera $E \leq F$.

Exemples : $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel. K^n est un sous-espace vectoriel.

Proposition 6.1 Soit $E \subseteq K^n$. Alors E est un sous-espace vectoriel si et seulement si $0 \in E, \forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K, \lambda x + \mu y \in E$.

Propriétés :

- i) Si $E, F \leq K^n$, alors $E \cap F$ est aussi un sous-espace vectoriel de K^n .
- ii) Si $E, F \leq K^n$, alors $E \cup F$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $E \leq F$ ou $F \leq E$.

Soient $v_1, \dots, v_k \in K^n$, on note $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$ le plus petit sous-espace contenant v_1, \dots, v_k . On vérifie aisément que :

$$\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K\} .$$

Notation : $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = K v_1 + \dots + K v_k$.

Exemple : $\{(x, y, z) \in K^3 : 2x + 3y + z = 0\} = \{(x, y, -2x - 3y) : x, y \in K\} = \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, -3) : x, y \in K\} = K(1, 0, -2) + K(0, 1, -3) = \text{Vect}\{1, 0, -2), (0, 1, -3)\}$; c'est donc un sous-espace vectoriel de K^3 .