Pour cocher, il suffit de cliquer !

Nom et prénom :

Fondamentaux des mathématiques II

printemps 2019

chapitres V applications linéaires, VI formules de Taylor, VII représentation matricielle des applications linéaires, VIII intégrale de Riemann

exercices d'entraînement

Règlement – *L'épreuve dure* **? ? ?** *minutes. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints.*
Cochez une seule réponse par question.

Sur les sommes de Riemann

Question 1 Que vaut $\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^5$?

☐ $\frac{1}{5}$ ☐ 1 ☐ Cette limite n'existe pas ! ☒ $\frac{1}{6}$

Question 2 Que vaut $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3n}$?

☒ $\ln(4/3)$ ☐ $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ ☐ $\ln 4$ ☐ $\ln 3$

Question 3 Que vaut $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2n}$?

☒ $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ☐ $\ln 2$ ☐ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ☐ $\ln 3$

Question 4 Que vaut $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{n}$?

☐ Cette limite n'existe pas ! ☐ $\frac{1}{\pi}$ ☒ 0 ☐ $\frac{2}{\pi}$

Question 5
Que vaut $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}$?

☐ $\frac{2}{3}$ ☒ $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ ☐ Cette limite n'existe pas ! ☐ $2^{\frac{3}{2}}-1$

Question 6 Que vaut $\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$?

☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ Cette limite n'existe pas ! ☒ $\frac{1}{2}$

Question 7 Que vaut $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{n}$?

- [x] $\frac{2}{\pi}$
- [ ] $\frac{1}{\pi}$
- [ ] 0
- [ ] Cette limite n'existe pas !

Question 8
Que vaut $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$?

- [x] $2\sqrt{2}-2$
- [ ] 1
- [ ] $+\infty$
- [ ] $\sqrt{2}-1$

Question 9 Que vaut $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k^2+n^2}$?

- [x] $\ln 2$
- [ ] $\ln 4$
- [ ] $\ln 3$
- [ ] Cette limite n'existe pas !

Question 10 Que vaut $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n}$?

- [ ] $\ln 3$
- [ ] Cette limite n'existe pas !
- [x] $\frac{\ln 3}{2}$
- [ ] $\ln 2$

Sur les intégrales

Question 11 Que vaut $\int_1^2 \ln x dx$?

- [ ] -1
- [ ] $2\ln 2$
- [x] $2\ln 2 - 1$
- [ ] $1/2$

Question 12 Que vaut $\int_0^1 x\sin(2x)dx$?

- [ ] $(\cos 2)/2 - (\sin 2)/4$
- [ ] $(\sin 2)/4$
- [x] $(\sin 2)/4 - (\cos 2)/2$
- [ ] 0

Question 13 Que vaut $\int_0^1 \arctan x dx$?

- [x] $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$
- [ ] $\frac{\pi}{4} - \ln 2$
- [ ] $-\ln 2$
- [ ] $\frac{\pi}{4}$

Question 14 Que vaut $\int_0^1 xe^{3x}dx$?

- [ ] $\frac{e^3}{3}$
- [ ] e^3
- [ ] $\frac{2}{9}e^3$
- [x] $\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

Question 15 Que vaut $\int_0^1 x\cos(\pi x)dx$?

- [ ] $1/\pi$
- [ ] $-1/\pi$
- [x] $-2/\pi^2$
- [ ] $2/\pi^2$

Question 16 Que vaut $\int_1^2 x^2 \ln x dx$?

- [ ] $-7/9$
- [ ] $7/9$
- [x] $\frac{8\ln 2}{3} - \frac{7}{9}$
- [ ] $\frac{8\ln 2}{3}$

Question 17 Que vaut $\int_0^1 x\cos(3x)dx$?

- ☐ $\frac{\sin 3}{3}+\frac{\cos 3}{9}$
- ☒ $\frac{\sin 3}{3}+\frac{\cos 3}{9}-\frac{1}{9}$
- ☐ $\frac{\sin 3}{3}$
- ☐ $\frac{\cos 3}{9}-\frac{1}{9}$

Question 18 Que vaut $\int_1^2 x^3\ln x dx$?

- ☐ $15/16$
- ☐ $4\ln 2$
- ☒ $4\ln 2 - 15/16$
- ☐ $-15/16$

Question 19 Que vaut $\int_0^1 x\sin(\pi x)dx$?

- ☐ $-1/\pi$
- ☐ 0
- ☐ $1/\pi^2$
- ☒ $1/\pi$

Question 20 Que vaut $\int_0^1 xe^{-x}dx$?

- ☐ $-e^{-1}$
- ☐ $1-e^{-1}$
- ☐ $2e^{-1}-1$
- ☒ $1-2e^{-1}$

Sur la représentation matricielle des applications linéaires

Question 21 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 3$. Soit f l'application linéaire :

$$f:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X],\ P(X)\mapsto P(X+1)\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$?

- ☐ I_3
- ☒ $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$
- ☐ I_4
- ☐ $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Question 22 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. Soit f l'application linéaire :

$$f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X],\ P(X)\mapsto P(0)+P(1)X+P(2)X^2\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, X(X-1)$?

- ☐ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&3&4\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&3&4\end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&4&4\end{pmatrix}$

Question 23 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. Soit f l'application linéaire :

$$f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X],\ P(X)\mapsto XP'\left(\frac{1}{X}\right)\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, \frac{X^2}{2}$?

- ☐ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
- ☐ I_3
- ☐ $\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Question 24 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P(X) \mapsto P(0) + P(1)X + P(2)X^2\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X-1, (X-1)^2$?

- ☒ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Question 25 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P(X) \mapsto X\frac{P(X)-P(1)}{X-1}\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, X^2$?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 26 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P(X) \mapsto X^2P"(X) - XP'(X)\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, X^2$?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 27 Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 4$. Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X],\ P(X) \mapsto P'(X)\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4$?

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 28 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 3$. Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P(X) \mapsto \frac{P(X)-P(1)}{X-1}\ .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$?

- ☐ I_4
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 29 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 2$. Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P(X) \mapsto X^2 P\left(\frac{1}{X}\right) .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X-1, (X-1)^2$?

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 30 Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant 4$. Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X],\ P(X) \mapsto P'(X) .$$

Quelle est la matrice de f dans la base $1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6}, \frac{X^4}{24}$?

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sur les applications linéaires

Question 31 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 6y + 4z, 3x + 9y + 6z, 5x + 15y + 10z)$.
Alors

☒ $\dim \ker f = 2$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ $\ker f = \mathrm{Im} f$.
☐ f est surjective mais non injective. ☐ $\mathrm{rg} f = 2$.

Question 32 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y + 2z + 3t, y + z + t, 2x + y + 5z + 7t)$.
Alors

☒ f est surjective. ☐ $\mathrm{rg} f = 1$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ f est injective.
☐ $\dim \ker f = 2$.

Question 33 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 3x + 4y + 3z, x + z, -2y)$.
Alors

☐ f est un isomorphisme. ☒ $\dim \ker f = 1$. ☐ f est surjective. ☐ $\mathrm{rg} f = 1$.
☐ f est injective.

Question 34 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (3x + 9y - 3z + 6t, y + z + t, z - t)$.
Alors

☐ f est injective. ☐ f est un isomorphisme. ☐ $\dim \ker f = 2$. ☒ f est surjective.
☐ $\mathrm{rg} f = 1$.

Question 35 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z, 7x + 8y)$.
Alors

☒ f est injective. ☐ $\dim \ker f = 1$. ☐ $\mathrm{rg} f = 1$. ☐ f est surjective.
☐ f est un isomorphisme.

Question 36 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 4y + 6z, 3x + 6y + 9z, 5x + 10y + 15z, 7x + 14y + 21z)$.
Alors

- [ ] f est surjective.
- [ ] f est injective.
- [ ] $\dim \ker f = 1$.
- [ ] f est un isomorphisme.
- [x] $\mathrm{rg} f = 1$.

Question 37 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y)$.
Alors

- [ ] f est surjective mais non injective.
- [ ] $\ker f = \mathrm{Im} f$.
- [ ] $\mathrm{rg} f = 2$.
- [x] f est un isomorphisme.
- [ ] $\dim \ker f = 2$.

Question 38 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y)$.
Alors

- [ ] $\ker f = \mathrm{Im} f$.
- [ ] $\dim \ker f = 2$.
- [ ] $\mathrm{rg} f = 2$.
- [ ] f est surjective mais non injective.
- [x] f est un isomorphisme.

Question 39 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (3x + 9y - 3z + 6t, 2x + 6y - 2z + 4t, -5x - 15y + 5z - 10t)$.
Alors

- [ ] f est surjective.
- [ ] f est un isomorphisme.
- [ ] $\dim \ker f = 2$.
- [x] $\mathrm{rg} f = 1$.
- [ ] f est injective.

Question 40 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.
Alors

- [ ] $\dim \ker f = 2$.
- [ ] $\ker f = \mathrm{im} f$.
- [ ] f est surjective mais non injective.
- [x] $\mathrm{rg} f = 2$.
- [ ] f est un isomorphisme.

Sur la formule de Taylor-Lagrange

Question 41 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \sin x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [ ] $x \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- [x] $x \geqslant f(x)$.

Question 42 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \ln(1 + x)\,,$$

on peut démontrer que pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$:

- [x] $x - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $x - \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $x + \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x \leqslant f(x)$.

Question 43 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{1+x}\,,$$

on peut démontrer que pour tout $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

- [ ] $1 + x \geqslant f(x)$.
- [x] $1 + \frac{x}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 + \frac{x}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x \leqslant f(x)$.

Question 44 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \arctan x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [ ] $1 - x \leqslant f(x)$.
- [ ] $x \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x \leqslant f(x)$.
- [x] $x \geqslant f(x)$.

Question 45 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \cos x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [x] $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $x \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $x \geqslant f(x)$.

Question 46 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto e^x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [x] $1 + x + \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x + \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x + x^2 \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x + x^2 \geqslant f(x)$.

Question 47 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [ ] $1 + 2x \leqslant f(x)$.
- [x] $1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \geqslant f(x)$.
- [ ] $x + \frac{x}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \leqslant f(x)$.

Question 48 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \tan x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

- [ ] $1 + x + \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $x \geqslant f(x)$.
- [x] $x \leqslant f(x)$.

Question 49 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [ ] $1 + \frac{x}{2} \leqslant f(x)$.
- [x] $1 - x + x^2 \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 - x + x^2 \leqslant f(x)$.

Question 50 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$$

on peut démontrer que pour tout $-1 < x < 1$:

☐ $1 + 2x \leqslant f(x)$. ☐ $1 + x + x^2 \geqslant f(x)$. ☒ $1 + x + x^2 \leqslant f(x)$. ☐ $x + \frac{x}{2} \geqslant f(x)$.

Sur les formules de Taylor

Question 51 Soit $f(x) = -\frac{x+1}{2x+x^2}$ pour $x \in]-2, 0[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

☒ $f^{(2n)}(-1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(-1) = (2n+1)!$ ☐ $f(-1) = 0$ et $f^{(n)}(-1) = n!$ si $n \geqslant 1$
☐ $f^n(1) = n!$ ☐ $f(-1) = 0$ et $f^{(n)}(-1) = 1$ si $n \geqslant 1$ ☐ $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = 1$

Question 52 Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

☒ $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!$ ☐ $f(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = 1$ si $n \geqslant 1$
☐ $f(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = n!$ si $n \geqslant 1$ ☐ $f^{(n)}(0) = n!$ ☐ $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = 1$

Question 53 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = f'(1) = 1$, $f''(0) = f''(1) = 2$, $f'''(0) = f'''(1) = 6$ et $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toutes les assertions suivantes sont nécessairement fausses, sauf une. Laquelle ?

☐ $f(0,1) = 0,111$ ☒ $f(1,1) = 0,1109$ ☐ $f(1,1) = 0,126$ ☐ $f(0,1) = 0,126$
☐ $f(1,1) = 0,1112$

Question 54 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 1$, $f''(0) = f''(1) = 2$, $f'''(0) = f'''(1) = 6$ et $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toutes les assertions suivantes sont nécessairement fausses, sauf une. Laquelle ?

☐ $f(0,1) = 0,1112$ ☐ $f(1,1) = 0,111$ ☒ $f(0,1) = 0,1109$ ☐ $f(0,1) = 0,126$
☐ $f(1,1) = 0,126$

Question 55 Soit $f(x) = \frac{x-1}{2x-x^2}$ pour $x \in]0, 2[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

☐ $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = 1$ ☐ $f(1) = 0$ et $f^{(n)}(1) = n!$ si $n \geqslant 1$
☐ $f(1) = 0$ et $f^{(n)}(1) = 1$ si $n \geqslant 1$ ☒ $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = (2n+1)!$ ☐ $f^{(n)}(1) = n!$