Chapitre XI. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

A. ÉQUATIONS DE DEGRÉ 1

1) Définition.

Une équation différentielle (de degré 1) est une équation de la forme :

$(E) \quad y' = F(x,y)$

où F est une fonction continue, et y est une fonction dérivable (en la variable x) .

Les solutions de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont les fonctions y dérivables sur I telles que :

$\forall x \epsilon I, \; y'(x) = F(x, y(x))$.

Exemples.

$y' = 0 \Leftrightarrow y = C$ constante.

$y' = f \Leftrightarrow y =$ une primitive de f.

Si $a \epsilon \mathbb{R}$, $\boxed{y' = ay \Leftrightarrow y(x) = Ce^{ax}}$ où C est une constante.

Démonstration. On pose $u(x) = e^{-ax} y(x)$.

On voit que : $u'(x) = -ae^{-ax} y(x) + e^{-ax} y'(x) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x))$.

Donc $y' = ay \Leftrightarrow u' = 0 \Leftrightarrow u = C \Leftrightarrow y(x) = Ce^{ax}$ où $C =$ contante.

Exemple non linéaire. $y' = y^2 + 1$ n'a pas de solution définie sur $\mathbb{R}$.

Mais il y a des solutions par exemple $y = \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(en effet $y' = y^2 + 1 \Leftrightarrow (\arctan(y))' = 1 \Leftrightarrow \arctan(y) = x + C \ldots$.)

2) Équations différentielles linéaires homogènes de degré 1

Ce sont les équations de la forme $y' = a(x)y$ où a est une fonction continue.

Théorème.

Si a est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

$y' = a(x)y \Leftrightarrow \forall x \epsilon I, y(x) = Ce^{A(x)}$où$A' = a$.

$y(x) = Ce^{\int a(x)dx}$

De plus, si $x_0 \epsilon I$, si $y_0 \epsilon \mathbb{R}$, alors il existe une unique solution de $y' = a(x)y$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration.

On introduit la fonction $u(x) = e^{-A(x)}y(x)$ où A est une primitive de a.

$u'(x) = e^{-A(x)}(-A'(x)y(x) + y'(x)) = e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x))$

donc : $y' = a(x)y \Leftrightarrow u'(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = C$ constante sur l'intervalle I.

Justification du « de plus »...:

Si $y(x) = Ce^{A(x)}$ alors $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \boxed{C = e^{A(x_0)}y_0}$.

Exemples.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = xy$.

$y' = xy \Leftrightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ où $C =$ constante.

b) $y' = e^x y \Leftrightarrow y(x) = Ce^{e^x}$

c) $y' = \cos(x)y \Leftrightarrow y(x) = Ce^{\sin(x)}$

d) Sur $\mathbb{R}_{>0}, xy' = y \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y(x) = Ce^{\ln(x)} = Cx$

e) Sur $]-1,1[$, résoudre : $(1-x^2)y' + xy = 0$

$\Leftrightarrow y' = \frac{-xy}{1-x^2} \Leftrightarrow y(x) = C\, e^{\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(x+1)} = \mathrm{C}\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$

$\int \frac{-x}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \text{constante}$

$\frac{-x}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$

3) Équations différentielles linéaires de degré 1 non homogènes

Théorème.

Une équation de la forme :

$(E) \quad y' = a(x)y + b(x)$

où a, b sont des fonctions continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$

a toujours des solutions définies sur I.

De plus, si $x_0 \epsilon I$, si $y_0 \epsilon \mathbb{R}$, alors l'équation (E) a une unique solution qui vérifie :

$y(x_0) = y_0$.

Démonstration.

(Méthode de variation de la constante)

On considère l'équation homogène associée :

$(E_h)\ y' = a(x)y \Leftrightarrow y(x) = Ce^{A(x)}$

où $A' = a$ et C constante.

on cherche une solution de (E) sous la forme $y(x) = C(x)e^{A(x)}$.

$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \Leftrightarrow e^{A(x)}(a(x)C(x) + C'(x)) = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x)$

$\Leftrightarrow C'(x) = \underbrace{e^{-A(x)}b(x)}_{\text{continue sur } I}$

qui a des solutions …

Unicité : il suffit de prendre : C tel que $C(x_0)e^{A(x_0)} = y_0$

C-à-d : $C(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-A(x)}b(x)dx + e^{-A(x_0)}y_0$.

Si y_1, y_2 sont solutions de (E), alors $(y_1 - y_2)' = a(x)(y_1 - y_2)$

Si de plus $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, alors $(y_1 - y_2)(x_0) = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0$.

… à suivre …

Rappels.

Si $a: I \to \mathbb{R}$ est continue alors :

$y' = a(x)y \Leftrightarrow y(x) = C\exp(A(x))$

où $A' = a$ et C une constante.

Si $a, b: I \to \mathbb{R}$ sont continues, alors :

$(E)\ y' = a(x)y + b(x) \Leftrightarrow y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

où y_H est solution de l'équation homogène :

$(E_H) y' = a(x)y$

et y_P est une solution particulière de (E).

Pour trouver une solution particulière de (E), on cherche une solution de la forme $y_P(x) = C(x)\exp(A(x))$ où $A' = a$. (Méthode de variation de la constante).

Exemple. $(E) y' + y = \sin(x)$.

On commence par résoudre l'équation homogène :

$(E_H) y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y \Leftrightarrow y(x) = C\exp(-x)$.

On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = C(x)\exp(-x)$.

$y(x) = C(x)\exp(-x)$ est solution de $(E) \Leftrightarrow \exp(-x)(C'(x) - C(x)) + \exp(-x)C(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \exp(-x)C'(x) = \sin(x) \Leftrightarrow C'(x) = \exp(x)\sin(x)$.

$\Leftarrow C(x) = \int \exp(x)\sin(x)dx = \int \exp(x)\mathrm{Im}(\exp(ix))dx = \mathrm{Im}(\int \exp((1+i)x)dx)$

$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+i}\exp((1+i)x)\right) = \exp(x)\mathrm{Im}\left(\frac{\exp(ix)}{1+i}\right)$

$= \exp(x)\mathrm{Im}\left(\frac{(1-i)\exp(ix)}{2}\right) = \exp(x)\frac{\sin x - \cos x}{2}$.

Donc $y(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2}$ est une solution particulière de (E).

Donc $\boxed{y' + y = \sin x \Leftrightarrow y(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + C\exp(-x)}$

où $C =$ constante.

B.– ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2 À COEFFICIENTS CONSTANTS.

Ce sont les équations de la forme :

$y'' + ay' + by = f(x)$

où $a, b \epsilon \mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ est continue.

Théorème. Soient $x_0 \epsilon I$, $y_0, y_1 \epsilon \mathbb{R}$. Alors l'équation :

$(E)\ y'' + ay' + by = f(x)$

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$

a une unique solution $y: I \to \mathbb{R}$ (deux fois dérivable).

I.– Équations homogènes

$(E)\ y'' + ay' + by = 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

1) Lemme

Lemme. Soient $u, v\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de (E). On suppose que u, v sont des solutions indépendantes au sens où :

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$

ALORS u, v forment une base de l'ensemble des solutions de (E).

Démonstration. En effet, si $\lambda u + \mu v = 0,\ \forall x,\ \lambda \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0$. Donc les fonctions u, v forment une famille libre. Montrons que c'estaussiune famille génératrice.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \epsilon \mathbb{R},\ \exists A(x), B(x) \epsilon \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} + B(x) \begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}.$

En effet, il suffit de prendre $\begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$

c-à-d : $\begin{cases} A(x) = \frac{v'(x)y(x) - v(x)y'(x)}{u(x)v'(x) - u'(x)v(x)} \\ B(x) = \frac{-u'(x)y(x) + u(x)y'(x)}{u(x)v'(x) - u'(x)v(x)} \end{cases}$

En particulier, on voit qu'on peut choisir A, B comme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car u, u', v, v' le sont) et que l'on a :

$y = Au + Bv$ et $y' = Au' + Bv'$.

Mais alors :

$y = Au + Bv \Rightarrow y' = Au' + Bv' + A'u + B'v \Rightarrow A'u + B'v = 0.$

Et $y' = Au' + Bv' \Rightarrow y'' = Au'' + Bv'' + A'u' + B'v'$

$\Rightarrow y'' = A(-au' - bu) + B(-av' - bv) + A'u' + B'v'$

$= -ay' - by + A'u' + B'v' \Rightarrow y'' + ay' + by = A'u' + B'v'.$

Donc si y est une solution de (E), on a aussi :

$A'u' + B'v' = 0.$

Mais alors : $A'\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + B'\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A' = B' = 0 \Rightarrow A, B$ sont constantes.

Donc $y \epsilon \mathrm{Vect}\{u, v\}\square$

Remarque. $\forall x \epsilon \mathbb{R}, \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \exists x_0, \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$

En effet, $(uv' - u'v)' = uv'' - u''v = u(-av' - bv) - (-au' - bu)v$

$= -a(uv' - u'v) \Rightarrow (uv' - u'v) = Ce^{-ax}\ldots$

On introduit le polynôme caractéristique associé à (E) : $x^2 + ax + b$

a) $x^2 + ax + b = 0$ a deux racines réelles $r_1 \neq r_2$

$\boxed{(E)\ y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow y(x) = A\exp(r_1 x) + B\exp(r_2 x)}$

où A, B constantes (réelles).

Démonstration.

Il suffit de montrer que $u(x) = e^{r_1 x}$ et $v(x) = e^{r_2 x}$ sont des solutions indépendantes de (E).

C'est vrai car dans ce cas : $\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{r_1 x + r_2 x}$

et on vérifie facilement que $(e^{r_i x})'' + a(e^{r_i x})' + be^{r_i x} = 0.$

b) $x^2 + ax + b = 0$ a une racine réelle double r.

$(E)\ y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow y(x) = (Ax + B)\exp(rx)$

Démonstration.

Il suffit de montrer que $u(x) = e^{rx}$ et $v(x) = xe^{rx}$ sont des solutions indépendantes de (E).

C'est vrai car dans ce cas : $\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (rx+1)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}$

et on vérifie facilement que $(x e^{rx})'' + a(x e^{rx})' + b x e^{rx} = 0$ en utilisant que $x^2 + ax + b = (x-r)^2$

c) $x^2 + ax + b = 0$ a deux racines complexes conjuguées non réelles : $r \pm i\omega$ avec r, ω réels.

(E) $y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow y(x) = e^{rx}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$

Moyen mnémotechnique : $A\,\mathrm{Re}(\exp((r+i\omega)x)) + B\,\mathrm{Im}(\exp((r+i\omega)x))$

Démonstration. Comme précédemment.

Exemples.

a)

$y'' - 3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow \dots$

1ère étape. $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \,\mathrm{ou}\, 2.$

Donc

2ème étape.

$y'' - 3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y(x) = Ae^x + Be^{2x}$

b) $y'' + 2y' + y = 0 \Leftrightarrow y(x) = (Ax + B)e^{-x}$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

c) $y'' + y' + y = 0 \Leftrightarrow y(x) = e^{\frac{-x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$

II.–Équations non homogènes.

L'équation

(E) $y'' + ay' + by = f(x)$

a pour solution $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

où y_H est solution de $(E_H) y'' + ay' + by = 0$ et y_P est une solution particulière de (E).

Comment trouver une solution particulière ?

1) cas où $f(x) = P(x)e^{rx}$ où P polynôme et $r \epsilon \mathbb{R}$

Si r n'est pas racine de $x^2 + ax + b = 0$

on cherche $y_P(x)$ de la forme $y_P(x) = Q(x)e^{rx}$ où Q est un polynôme de degré $\leqslant$deg P.

Si r est une racine simple $x^2 + ax + b = 0$

on cherche $y_P(x)$ de la forme $y_P(x) = xQ(x)e^{rx}$ où Q est un polynôme de degré $\leqslant$deg P.

Si r est une racine double $x^2 + ax + b = 0$

on cherche $y_P(x)$ de la forme $y_P(x) = x^2 Q(x)e^{rx}$ où Q est un polynôme de degré $\leqslant$deg P.

2) **cas où $f(x) = P(x)e^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ où P polynôme et $r \epsilon \mathbb{R}$**

Si $r + i\omega$ n'est pas racine de $x^2 + ax + b = 0$

on cherche $y_P(x)$ de la forme $y_P(x) = e^{rx}(Q(x)\cos(\omega x) + R(x)\sin(\omega x))$où Q, R sont des polynômes de degrés $\leqslant$deg P.

Si $r + i\omega$ est une racine de $x^2 + ax + b = 0$

on cherche $y_P(x)$ de la forme $y_P(x) = x\,e^{rx}(Q(x)\cos(\omega x) + R(x)\sin(\omega x))$où Q, R sont des polynômes de degrés $\leqslant$deg P.

Exemples.

a) (E)$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

Solutions de (E)

1ère étape. (E_H): $y'' + 2y' + y = 0 \Leftrightarrow y(x) = (Ax + B)e^{-x}$

2è étape. On cherche une solution particulière

de la forme : $\boxed{y(x) = x^2\lambda e^{-x}}$

(car -1 est racine double de $x^2 + 2x + 1 = 0$)

$y'(x) = e^{-x}(2x\ \lambda - \lambda x^2)$

$y''(x) = e^{-x}(2\lambda - 2\lambda x - 2x\lambda + \lambda x^2)$

$\Rightarrow y'' + 2y' + y = e^{-x}(-2\lambda x^2 + \lambda x^2 - 4\lambda x + 4\lambda x + 2\lambda) = 2e^{-x}$

$\Leftrightarrow \lambda = 1.$

Donc $y(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière.

Donc $(E) \Leftrightarrow y(x) = x^2 e^{-x} + (Ax + B)e^{-x}$

b) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

Solutions de l'équation homogène : $y(x) = Ae^x + Be^{2x}$

On cherche une solution particulière sous la forme :

$y(x) = P(x)e^{0x} = P(x)$ où P est un polynôme de degré $\leqslant \deg P$.

(*Car 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique)*

$y(x) = cx^2 + dx + e$

$y'(x) = 2cx + d$

$y'' = 2c$

$y'' - 3y' + 2y = (c)x^2 + (-6c + 2d)x + (2c - 3d + 2e) = 2x^2 - 6x + 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ -6c + 2d = -6 \\ 2c - 3d + 2e = 4 \end{cases} \Leftrightarrow c = 2, d = 3, e = \frac{9}{2}$

Donc $2x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ est une solution particulière.

Donc les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$ sont les :

$y(x) = 2x^2 + 3x + \frac{9}{2} + Ae^x + Be^{2x}$

c) $y'' + y = \sin x \ldots.$

Rappels.

$y'' + ay' + by = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } x^2 + ax + b = (x - r_1)(x - r_2) \text{ avec } r_1 \neq r_2 \epsilon \mathbb{R}, \; y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \\ \text{si } x^2 + ax + b = (x - r)^2, \; y(x) = (Ax + B)e^{rx} \\ \text{si } x^2 + ax + b = (x - z)(x - \bar{z}) \text{où } z = r + i\omega \text{ avec } \omega \neq 0, \; y(x) = e^{rx}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)) \end{cases}$

où $A, B =$

constantes.

Exemple.

$(E)\ y''+y=\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$ et i est une racine de $x^2+1=0$

On résout d'abord : $y''+y=0 \Leftrightarrow y(x)=A\cos x+B\sin x, A, B\epsilon\mathbb{R}$.

Ensuite on cherche une solution particulière de la forme :

$y(x)=x(\lambda\cos x+\mu\sin x)$où $\lambda, \mu\epsilon\mathbb{R}$.

$y'(x)=\cos x(\lambda+\mu x)+\sin x(-\lambda x+\mu)$

$y''(x)=\cos x(\mu+\mu-\lambda x)+\sin x(-\lambda+\mu x-\lambda)$

$y''+y=\cos x(2\mu)+\sin x(-2\lambda)=\sin x \Leftrightarrow \mu=0, \lambda=-\frac{1}{2}$.

Donc on a trouvé une solution particulière de (E) : $y_P(x)=-\frac{x}{2}\cos x$.

Donc $\boxed{y''+y=\sin x \Leftrightarrow y(x)=-\frac{x}{2}\cos x+A\cos x+B\sin x, A, B\epsilon\mathbb{R}.}$

3) Méthode « générale » de variation des constantes

Proposition. Soit $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a, b\epsilon\mathbb{R}$.

Alors l'équation $(E)\ y''+ay'+by=0$

$\Leftrightarrow y(x)=\lambda u+\mu v$

où λ, μ sont des fonctions dérivables sur I telles que :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda'u+\mu'v=0 \\ \lambda'u'+\mu'v'=f \end{cases}}$$

et où u, v sont des solutions indépendantes (linéairement indépendantes) de l'équation homogène :

$(E_h)\ y''+ay'+by=0$.

Remarques.

a)

si $x^2+ax+b=(x-r_1)(x-r_2)$ avec $r_1\neq r_2$, alors on peut prendre :

$u=e^{r_1x}, v=e^{r_2x}$

si $x^2+ax+b=(x-r)^2$, alors on peut prendre :

$u=xe^{rx}, v=e^{rx}$

si $x^2+ax+b=(x-z)(x-\bar{z})$ où $z=r+i\omega$ avec $\omega\neq 0$, alors on peut prendre :

$u=e^{rx}\cos(\omega x),\ v=e^{rx}\sin(\omega x)$.

u, v sont bien indépendantes (exo) c-à-d $\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} \neq 0 (\forall x)$

b) $\begin{cases} \lambda' u+\mu' v=0 \\ \lambda' u'+\mu' v'=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} \lambda'=\frac{-vf}{uv'-u'v} \\ \mu'=\frac{uf}{uv'-u'v} \end{cases}$

don con peut toujours trouver des (primitives) λ, μ.

Exemple.

$(E)\ y''+y=\sin x$

d'après la proposition :

$(E)\Leftrightarrow y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$ avec $\begin{cases} \lambda'\cos x+\mu'\sin x=0 \\ -\lambda'\sin x+\mu'\cos x=\sin x \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} \lambda'=-\sin^2 x \\ \mu'=\cos x\sin x \end{cases}$

Or $\int -\sin^2 x\,dx=\int\left(\frac{\cos(2x)-1}{2}\right)dx=-\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+A$

et $\int\cos x\sin x\,dx=\int\frac{\sin(2x)}{2}dx=-\frac{\cos(2x)}{4}+B$

conclusion : $(E)\ y''+y=\sin x\Leftrightarrow y(x)=\left(-\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+A\right)\cos x+\left(-\frac{\cos(2x)}{4}+B\right)\sin x=\boxed{-\frac{x}{2}\cos x+A\cos x+B\sin x+\frac{\sin x}{4}}$

Démonstration de la proposition.

Soient u,v deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée :

$(E_h) y''+ay'+by=0.$

Alors pour tout $x\epsilon I$, les vecteurs $\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$,

donc il existe $(\forall x), \lambda'(x), \mu'(x)$ réels tels que :

$\lambda'(x)\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} + \mu'(x)\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

Alors $x \mapsto \lambda'(x)$ et $x \mapsto \mu'(x)$ sont continues.

En effet : $\lambda' = \frac{-vf}{uv'-u'v} \ldots$

Donc il existe λ, μdérivables ....

Supposons que λ, μ sont des fonctions dérivables qui vérifient :

$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = f \end{cases}$

alors posons $y = \lambda u + \mu v$.

On a : $y' = \lambda' u + \mu' v + \lambda u' + \mu v' = \lambda u' + \mu v'$

$\Rightarrow y'' = \lambda' u' + \mu' v' + \lambda u'' + \mu v'' = f + \lambda u'' + \mu v''$

Or $u''+au'+bu=0$ et $v''+av'+bv=0$.

Donc $y''+ay'+by = f + \lambda(u''+au'+bu) + \mu(v''+av'+bv) = f$.

Réciproquement soit y solution de (E) c-à-d : $y''+ay'+by=0$.

Alors il existe λ, μ dérivables telles que :

$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \lambda(x)\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} + \mu(x)\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}' = \lambda'(x)\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} + \mu'(x)\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} + \lambda(x)\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}' + \mu(x)\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}'$

$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} - \lambda(x)\begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \end{pmatrix} - \mu(x)\begin{pmatrix} v'(x) \\ v''(x) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}} = \lambda'(x)\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} + \mu'(x)\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} = \lambda'(x)\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} + \mu'(x)\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$

c-à-d : $\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = f \end{cases}$ $\square$

Exemple.

$(E) y'' + y = \tan^2 x$

$\left(\text{on cherche les solutions sur } l'\text{intervalle } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

On pose $u = \cos x, v = \sin x$.

Ce sont des solutions indépendantes de $y'' + y = 0$.

Les solutions de (E) sont $\lambda \cos x + \mu \sin x$ avec :

$$\begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0 \\ \lambda'(-\sin x) + \mu' \cos x = \tan^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = -\sin x \tan^2 x = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \\ \\ \mu' = \cos x \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \end{cases}$$

Or $\int -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1-t^2) dt}{t^2} = -\frac{1}{t} - t + A = \frac{-1}{\cos x} - \cos x + \mathrm{A}$

poser $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$

et : $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{t^2}{\cos^2 x} dt = \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int \left(-1 + \frac{1}{1-t^2}\right) dt = -t + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + B$

$= -\cos x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + B$

Poser $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$.

Donc $(E) y'' + y = \tan^2 x \Leftrightarrow y(x) = \left(\frac{-1}{\cos x} - \cos x + A\right) \cos x + \left(-\cos x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + B\right) \sin x$

$\Leftrightarrow y(x) = -1 - \cos^2 x - \cos x \sin x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + A \cos x + B \sin x.$

4) **Existence et unicité des solutions avec conditions initiales.**

$(E) \; y'' + a y' + b y = f(x)$

où $a, b \epsilon \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Théorème. Soient $x_0 \epsilon I$, $y_{0,} y_1 \epsilon \mathbb{R}$. Alors (E)

a une unique solution $y: I \to \mathbb{R}$ (deux fois dérivable) telle que :

$y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Démonstration.

Unicité. Si y et z sont des solutions de (E).

Alors $(y - z)'' + a(y - z)' + b(y - z) = f - f = 0$.

Donc $w = (y - z) = Au + Bv$ où u, v forment une base des solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Si de plus $y(x_0) = z(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z'(x_0) = y_1$, alors :

$w(x_0) = 0 = w'(x_0) \Rightarrow A\begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} v(x_0) \\ v'(x_0) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A = B = 0$

car $\begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v(x_0) \\ v'(x_0) \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Donc $w = 0$ et $z = y$.

Existence.

Soit y_P une solution particulière de (E). (c'est possible d'après la proposition ci-dessus).

Soient u, v base de solutions de $(E_h) y'' + ay' + by = 0$.

Alors on cherche y sous la forme $y = y_P + Au + Bv$.

Une telle fonction y est solution de (E). De plus,

$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} v(x_0) \\ v'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - y_P(x_0) \\ y_1 - y_{P'}(x_0) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{v'(x_0)(y_0 - y_P(x_0)) - v(x_0)(y_1 - y_{P'}(x_0))}{u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0)} \\ B = \frac{-u'(x_0)(y_0 - y_P(x_0)) + u(x_0)(y_1 - y_{P'}(x_0))}{u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0)} \end{cases}$

Donc on peut trouver une solution y de (E) qui vérifie les conditions :

$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$.

Fin du chapitre XI.