L1 – fondamentaux des mathématiques II

Examen final du mercredi 10 mai 2017

durée : 3h

Le sujet est imprimé sur une page recto-verso. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction. Documents, téléphones portables et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

En plus de votre nom et votre numéro d'étudiant, veuillez indiquer en haut sur votre copie votre **parcours** *(un des quatre suivants : Math, Info, Math Éco, ou Cursus préparatoire).*

Exercice 1 *6 points*

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(a)$, et déterminer un tel vecteur.
3. Soient $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.
   (a) Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
   (b) En déduire que (b, c) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 2 *4 points*

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} f_\alpha(e_1) &= e_1 + e_2 + 2e_3 \\ f_\alpha(e_2) &= e_1 + e_2 + \alpha e_3 \\ f_\alpha(e_3) &= e_1 + 2e_3 \end{aligned}$$

1. Donner la matrice A représentative de f_α dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse de la matrice A.

3. Pour quelles valeurs de α f_α est-il un isomorphisme ?

Exercice 3 *4 points*

1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle
$$y'' + y' - 2y = -3e^{-2t} + 1$$
2. Exprimer la solution y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 4 *4 points*

1. À l'aide du changement de variables $u = \ln(x)$, puis d'intégrations par parties bien choisies, calculer $\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2 dx$.
2. Donner le domaine de définition de la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$. Déterminer ses primitives *(indication : on pourra remarquer que $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$).*

Exercice 5 *4 points*

Soit h l'application définie par
$$h(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} \ln(1+x)$$

1. Donner le domaine de définition de h.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{(x+1)}{x^2+2x+2}$ au voisinage de 0. En déduire le développement limité de h à l'ordre 3 au voisinage de 0.
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de h au point $(0, 0)$, et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

Exercice 6 *3 points*

On rappelle que pour $a \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a : $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

1. Montrer que $0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$.
2. Prouver que $2\arctan(\frac{1}{3}) = \arctan(\frac{3}{4})$.

Exercice 7 *3 points*

Soient α, β des réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$$

Montrer que S_n est convergente et calculer sa limite (on pourra faire apparaître une somme de Riemann).