Exercice 9 (fiche 7)

Soit $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $g(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3, g(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3, g(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(2) Soit $E = \{v \in \mathbb{R}^3 |\ g(v) = v\}$.
a) $g(0) = 0$ car g est une application linéaire donc $0 \in E$
b) Soient $v_1, v_2 \in E, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$,

$$g(r_1v_1 + r_2v_2) = g(r_1v_1) + g(r_2v_2) = r_1g(v_1) + r_2g(v_2) = r_1v_2 + r_1v_1$$

Donc $r_1v_2 + r_1v_1 \in E$
On va chercher à caractériser E avec des équations cartésiennes. On détermine d'abord $g(x_1, x_2, x_3), \forall (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3$. On sait (voir cours) que :

$$g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $(x_1, x_2, x_3) \in E \Leftrightarrow g(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + x_2 + 4x_3, 2x_1 - x_2 - 2x_3, -4x_1 + 2x_2 + 5x_3) = (x_1, x_2, x_3)$. On résout donc le système suivant :

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1, L_3 \leftarrow -L_3 + L_1) \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

On a donc $v \in E \Leftrightarrow v = (x_1, 0, x_1) = x_1(1, 0, 1) \Leftrightarrow E = Vect\{(1, 0, 1)\}$. On a donc $(1, 0, 1) \in E$ et E est un sev de dimension 1.

3) Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. On va écrire F sous la forme de $Vect\{b, c\}$ afin de montrer que F est un sev et donner une base de cet espace (pour la méthode générale, voir (2)). On a

$$v \in F \Leftrightarrow v = (x_1, x_2, \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2) = x_1(1, 0, \frac{2}{3}) + x_2(0, 1, -\frac{2}{3}) \Leftrightarrow F = Vect\{(1, 0, \frac{2}{3}), (0, 1, -\frac{2}{3})\}$$

Les deux vecteurs $(1, 0, \frac{2}{3}), (0, 1, -\frac{2}{3})$ sont non-collinéaires, cette famille est donc une base de F.

4) Montrons que la famille $\{(1, 0, 1), (1, 0, \frac{2}{3}), (0, 1, -\frac{2}{3})\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme c'est un espace de dimension 3, il suffit de montrer que la famille est libre. On résout le système donné par $r_1a + r_2b + r_3c = (0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 0 \\ r_3 = 0 \\ r_1 + \frac{2}{3}r_2 - \frac{2}{3}r_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = 0 \\ r_1 + \frac{2}{3}r_2 = 0 \\ r_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = 0 \\ \frac{-1}{3}r_2 = 0 \\ r_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \\ r_3 = 0 \end{cases}$$

La famille est bien libre, c'est donc une base.

Exercice 10 (fiche 7)

Soit $E \subset C^{\propto}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions vérifiant $y" + y = 0$

1) (Rappel : $cos'(x) = -sin(x)$ et $sin'(x) = cos(x)$). On a $cos"(x) = -cos(x)$ donc $cos''(x)+cos(x) = 0$; de même $sin''(x) = -sin(x)$ donc $sin''(x)+sin(x) = 0$. Par conséquent, $cos(x), sin(x) \in E$.

2) Pour montrer que la famille $B = \{cos(x), sin(x)\}$ est une base de l'espace E de dimension 2, il suffit de vérifier que la famille est libre. On résout le système donné par $\forall x \in \mathbb{R}, r_1cos(x) + r_2sin(x) = 0$ en prenant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} r_1cos(0) + r_2sin(0) = 0 \\ r_1cos(\frac{\pi}{2}) + r_2sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

La famille B est bien libre, c'est une base de E.

3) Soit $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, g(a, b) = acos(x) + bsin(x)$. On remarque d'abord que g est une application linéaire. Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, calculons $g(e_2), g(e_2)$ que nous exprimerons dans la base $B = \{cos(x), sin(x)\}$ de E. On a $g(1, 0) = cos(x)$ et $g(0, 1) = sin(x)$. Finalement, on obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Comme nous sommes en dimension finie, il suffit de vérifier que l'application linéaire g est surjective i.e $Im(g) = E$. Or, on a que $Im(g) = Vect\{g(e_1), g(e_2)\} = Vect\{cos(x), sin(x)\} = E$ par les questions 2) et 3). Par conséquent, g est une bijection.