Question 7

Exercices sur les applications linéaires et les formules de Taylor ...

Question 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.
Alors

☐ $\mathrm{rg} f = 2$. ☐ $\ker f = \mathrm{im} f$. ☐ $\dim \ker f = 2$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ f est surjective mais non injective.

Question 2 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y + 2z + 3t, y + z + t, 2x + y + 5z + 7t)$.
Alors

☐ $\dim \ker f = 2$. ☐ f est injective. ☐ f est surjective. ☐ $\mathrm{rg} f = 1$. ☐ f est un isomorphisme.

Question 3 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (3x + 9y - 3z + 6t, y + z + t, z - t)$.
Alors

☐ f est injective. ☐ f est surjective. ☐ $\dim \ker f = 2$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ $\mathrm{rg} f = 1$.

Question 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 3x + 4y + 3z, x + z, -2y)$.
Alors

☐ $\mathrm{rg} f = 1$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ f est injective. ☐ f est surjective. ☐ $\dim \ker f = 1$.

Question 5 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 6y + 4z, 3x + 9y + 6z, 5x + 15y + 10z)$.
Alors

☐ f est un isomorphisme. ☐ $\mathrm{rg} f = 2$. ☐ $\ker f = \mathrm{Im} f$. ☐ f est surjective mais non injective. ☐ $\dim \ker f = 2$.

Question 6 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y)$.
Alors

☐ $\ker f = \mathrm{Im} f$. ☐ f est surjective mais non injective. ☐ $\mathrm{rg} f = 2$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ $\dim \ker f = 2$.

Question 7 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z, 7x + 8y)$.
Alors

☐ $\dim \ker f = 1$. ☐ $\mathrm{rg} f = 1$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ f est injective. ☐ f est surjective.

Question 8 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y)$.
Alors

☐ $\ker f = \mathrm{Im} f$. ☐ f est un isomorphisme. ☐ $\mathrm{rg} f = 2$. ☐ $\dim \ker f = 2$. ☐ f est surjective mais non injective.

Question 9 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 4y + 6z, 3x + 6y + 9z, 5x + 10y + 15z, 7x + 14y + 21z)$. Alors

- ☐ f est un isomorphisme.
- ☐ f est injective.
- ☐ $\mathrm{rg} f = 1$.
- ☐ f est surjective.
- ☐ $\dim \ker f = 1$.

Question 10 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (3x + 9y - 3z + 6t, 2x + 6y - 2z + 4t, -5x - 15y + 5z - 10t)$. Alors

- ☐ $\dim \ker f = 2$.
- ☐ $\mathrm{rg} f = 1$.
- ☐ f est surjective.
- ☐ f est un isomorphisme.
- ☐ f est injective.

Question 11 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \tan x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

- ☐ $x \geqslant f(x)$.
- ☐ $1 + x + \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- ☐ $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- ☐ $x \leqslant f(x)$.

Question 12 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \cos x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- ☐ $x \geqslant f(x)$.
- ☐ $1 - \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- ☐ $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- ☐ $x \leqslant f(x)$.

Question 13 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto e^x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- ☐ $1 + x + \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- ☐ $1 + x + x^2 \leqslant f(x)$.
- ☐ $1 + x + x^2 \geqslant f(x)$.
- ☐ $1 + x + \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.

Question 14 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \arctan x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- ☐ $1 + x \leqslant f(x)$.
- ☐ $x \geqslant f(x)$.
- ☐ $x \leqslant f(x)$.
- ☐ $1 - x \leqslant f(x)$.

Question 15 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \sin x\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- ☐ $x \leqslant f(x)$.
- ☐ $1 - \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- ☐ $x \geqslant f(x)$.
- ☐ $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.

Question 16 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [ ] $1 + 2x \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \leqslant f(x)$.
- [ ] $x + \frac{x}{2} \geqslant f(x)$.

Question 17 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{1+x}\,,$$

on peut démontrer que pour tout $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

- [ ] $1 + \frac{x}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + \frac{x}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x \geqslant f(x)$.

Question 18 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}\,,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

- [ ] $1 - \frac{x}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + \frac{x}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 - x + x^2 \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 - x + x^2 \geqslant f(x)$.

Question 19 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x}\,,$$

on peut démontrer que pour tout $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

- [ ] $1 + 2x \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x + x^2 \geqslant f(x)$.
- [ ] $x + \frac{x}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x + x^2 \leqslant f(x)$.

Question 20 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \ln(1+x)\,,$$

on peut démontrer que pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$:

- [ ] $x - \frac{x^2}{2} \geqslant f(x)$.
- [ ] $x + \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.
- [ ] $1 + x \leqslant f(x)$.
- [ ] $x - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x)$.

Question 21 Soit $f(x) = -\frac{x+1}{2x+x^2}$ pour $x \in]-2, 0[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

- [ ] $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = 1$
- [ ] $f^{(2n)}(-1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(-1) = (2n+1)!$
- [ ] $f(-1) = 0$ et $f^{(n)}(-1) = 1$ si $n \geqslant 1$
- [ ] $f^n(1) = n!$
- [ ] $f(-1) = 0$ et $f^{(n)}(-1) = n!$ si $n \geqslant 1$

Question 22 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 1$, $f''(0) = f''(1) = 2$, $f'''(0) = f'''(1) = 6$ et $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toutes les assertions suivantes sont nécessairement fausses, sauf une. Laquelle ?

- [ ] $f(0,1) = 0,126$
- [ ] $f(1,1) = 0,126$
- [ ] $f(1,1) = 0,111$
- [ ] $f(0,1) = 0,1112$
- [ ] $f(0,1) = 0,1109$

Question 23 Soit $f(x) = \frac{x-1}{2x-x^2}$ pour $x \in]0,2[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

☐ $f(1) = 0$ et $f^{(n)}(1) = 1$ si $n \geqslant 1$ ☐ $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = 1$ ☐ $f^{(n)}(1) = n!$
☐ $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = (2n+1)!$ ☐ $f(1) = 0$ et $f^{(n)}(1) = n!$ si $n \geqslant 1$

Question 24 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Laquelle des formules suivantes donne la meilleure approximation de $f''(a)$?

☐ $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$ ☐ $\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ ☐ $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ ☐ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Question 25 Soit $f(x) = 1 - 3x + 2x^2 + (x-1)^3 \cos(\sqrt{3+x^2} - 2(e^{x-1}))$ pour $x \in \mathbb{R}$. Laquelle des égalités suivantes est-elle juste ?

☐ $f'(1) = 1$ ☐ $f'(0) = 1$ ☐ $f(1) = 1$ ☐ $f'(1) = -3$ ☐ $f'(0) = 2$

Question 26 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Laquelle des formules suivantes donne la meilleure approximation de $f'(a)$?

☐ $\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ ☐ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ☐ $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ ☐ $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$

Question 27 Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

☐ $f^{(n)}(0) = n!$ ☐ $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!$ ☐ $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = 1$
☐ $f(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = 1$ si $n \geqslant 1$ ☐ $f(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = n!$ si $n \geqslant 1$

Question 28 Soit $f(x) = -1 + x + 2(x-1)^2 + x^3 \cos(\sqrt{4+x^2} - 2e^{\cos x})$ pour $x \in \mathbb{R}$. Laquelle des égalités suivantes est-elle juste ?

☐ $f'(0) = 1$ ☐ $f'(1) = -3$ ☐ $f'(0) = 2$ ☐ $f(1) = 1$ ☐ $f'(0) = -3$

Question 29 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = f'(1) = 1$, $f''(0) = f''(1) = 2$, $f'''(0) = f'''(1) = 6$ et $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toutes les assertions suivantes sont nécessairement fausses, sauf une. Laquelle ?

☐ $f(0,1) = 0,126$ ☐ $f(1,1) = 0,1112$ ☐ $f(0,1) = 0,111$ ☐ $f(1,1) = 0,1109$
☐ $f(1,1) = 0,126$

Question 30 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, -e_2, 2e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3)$

Question 31 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, -e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$

Question 32 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, -e_2, 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$

Question 33 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 - 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, -e_2, -2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$

Question 34 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (2x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, -2e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2, e_2 + 2e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2 + e_3)$

Question 35 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_1 - e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$

Question 36 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, -x_1 + x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, e_2, -2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, -e_1 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 - 2e_3)$

Question 37 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, -e_2, 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3)$

Question 38 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, e_2, 2e_3)$

Question 39 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, -e_2, 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$

Question 40 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1 + e_2)$

Question 41 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (2x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_2 - e_3)$

Question 42 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, e_1 - e_2, 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(-e_1 + e_3, e_2 + e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3)$

Question 43 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_1 + e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2)$

Question 44 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + x_3)$$

L'image de u est :

☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 + e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$

Question 45 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1 - e_2)$ ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1, e_2, 2e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3)$

Question 46 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, -x_1 + x_3)$$

L'image de u est :

☐ $\mathrm{Vect}(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, -e_1 + e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3)$

Question 47 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_2 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3)$

Question 48 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 + e_3)$

Question 49 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

L'image de u est :

- ☐ $\mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1 + e_2)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
- ☐ $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$

Question 50 Soient

$$e_1 = (1, 1, 0),\ e_2 = (1, 0, 1),\ e_3 = (0, 1, 1)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (22, -9, 3)$, $f(e_2) = (3, 0, 0)$, $f(e_3) = (11, -3, 1)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8

Question 51 Soient

$$e_1 = (2, 1, 1),\ e_2 = (1, 2, 1),\ e_3 = (1, 1, 2)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (8, 5, 8)$, $f(e_2) = (10, 5, 10)$, $f(e_3) = (12, 5, 12)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8

Question 52 Soient

$$e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (0, 1, 1),\ e_3 = (1, -2, -1)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (6, 3, 9)$, $f(e_2) = (5, 2, 7)$, $f(e_3) = (-6, -2, -8)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8

Question 53 Soient

$$e_1 = (0, 1, 1),\ e_2 = (1, 0, 1),\ e_3 = (1, 1, 0)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (5, 5, 2)$, $f(e_2) = (4, 4, 1)$, $f(e_3) = (3, 3, 1)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8

Question 54 Soient

$$e_1 = (5, 2, 0),\ e_2 = (8, 5, 2),\ e_3 = (3, 2, 1)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (7, 3, -3)$, $f(e_2) = (17, 3, -3)$, $f(e_3) = (7, 1, -1)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8

Question 55 Soient
$$e_1 = (5, 2, 0),\ e_2 = (8, 5, 2),\ e_3 = (3, 2, 1)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (3, 5, 5)$, $f(e_2) = (2, 10, 10)$, $f(e_3) = (0, 4, 4)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8

Question 56 Soient
$$e_1 = (1, -1, -1),\ e_2 = (-1, 1, -1),\ e_3 = (-1, -1, 1)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (4, 7, 10)$, $f(e_2) = (2, 5, 8)$, $f(e_3) = (0, 3, 6)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8

Question 57 Soient
$$e_1 = (2, 1, 1),\ e_2 = (1, 2, 1),\ e_3 = (1, 1, 2)\ .$$

a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (5, 1, -1)$, $f(e_2) = (5, -1, 1)$, $f(e_3) = (6, 0, 0)$. Déterminer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer une base de $\mathrm{im} f$.

e) A-t-on $\ker f \bigoplus \mathrm{im} f = \mathbb{R}^3$?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5 ☐5.5 ☐6 ☐6.5 ☐7 ☐7.5 ☐8
