

Question 7

Exercices sur les applications linéaires et les formules de Taylor ...

Question 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.

Alors

- $\text{rg} f = 2$. $\ker f = \text{im} f$. $\dim \ker f = 2$. f est un isomorphisme.
 f est surjective mais non injective.

Question 2 Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y + 2z + 3t, y + z + t, 2x + y + 5z + 7t)$.

Alors

- $\dim \ker f = 2$. f est injective. f est surjective. $\text{rg} f = 1$.
 f est un isomorphisme.

Question 3 Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (3x + 9y - 3z + 6t, y + z + t, z - t)$.

Alors

- f est injective. f est surjective. $\dim \ker f = 2$. f est un isomorphisme.
 $\text{rg} f = 1$.

Question 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 3x + 4y + 3z, x + z, -2y)$.

Alors

- $\text{rg} f = 1$. f est un isomorphisme. f est injective. f est surjective.
 $\dim \ker f = 1$.

Question 5 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 6y + 4z, 3x + 9y + 6z, 5x + 15y + 10z)$.

Alors

- f est un isomorphisme. $\text{rg} f = 2$. $\ker f = \text{Im} f$.
 f est surjective mais non injective. $\dim \ker f = 2$.

Question 6 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y)$.

Alors

- $\ker f = \text{Im} f$. f est surjective mais non injective. $\text{rg} f = 2$.
 f est un isomorphisme. $\dim \ker f = 2$.

Question 7 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z, 7x + 8y)$.

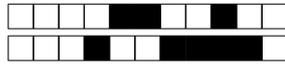
Alors

- $\dim \ker f = 1$. $\text{rg} f = 1$. f est un isomorphisme. f est injective.
 f est surjective.

Question 8 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y)$.

Alors

- $\ker f = \text{Im} f$. f est un isomorphisme. $\text{rg} f = 2$. $\dim \ker f = 2$.
 f est surjective mais non injective.



Question 9 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 4y + 6z, 3x + 6y + 9z, 5x + 10y + 15z, 7x + 14y + 21z)$.
Alors

- f est un isomorphisme. f est injective. $\text{rg} f = 1$. f est surjective.
 $\dim \ker f = 1$.

Question 10 Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (3x + 9y - 3z + 6t, 2x + 6y - 2z + 4t, -5x - 15y + 5z - 10t)$.
Alors

- $\dim \ker f = 2$. $\text{rg} f = 1$. f est surjective. f est un isomorphisme.
 f est injective.

Question 11 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \tan x,$$

on peut démontrer que pour tout $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

- $x \geq f(x)$. $1 + x + \frac{x^2}{2} \geq f(x)$. $1 - \frac{x^2}{2} \leq f(x)$. $x \leq f(x)$.

Question 12 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \cos x,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geq 0$:

- $x \geq f(x)$. $1 - \frac{x^2}{2} \geq f(x)$. $1 - \frac{x^2}{2} \leq f(x)$. $x \leq f(x)$.

Question 13 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto e^x,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geq 0$:

- $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq f(x)$. $1 + x + x^2 \leq f(x)$. $1 + x + x^2 \geq f(x)$.
 $1 + x + \frac{x^2}{2} \geq f(x)$.

Question 14 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \arctan x,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geq 0$:

- $1 + x \leq f(x)$. $x \geq f(x)$. $x \leq f(x)$. $1 - x \leq f(x)$.

Question 15 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \sin x,$$

on peut démontrer que pour tout $x \geq 0$:

- $x \leq f(x)$. $1 - \frac{x^2}{2} \geq f(x)$. $x \geq f(x)$. $1 - \frac{x^2}{2} \leq f(x)$.



Question 16 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}},$$

on peut démontrer que pour tout $x \geq 0$:

$1 + 2x \leq f(x)$. $1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \geq f(x)$. $1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \leq f(x)$. $x + \frac{x}{2} \geq f(x)$.

Question 17 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{1+x},$$

on peut démontrer que pour tout $-1 \leq x \leq 1$:

$1 + \frac{x}{2} \leq f(x)$. $1 + x \leq f(x)$. $1 + \frac{x}{2} \geq f(x)$. $1 + x \geq f(x)$.

Question 18 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

on peut démontrer que pour tout $x \geq 0$:

$1 - \frac{x}{2} \leq f(x)$. $1 + \frac{x}{2} \leq f(x)$. $1 - x + x^2 \leq f(x)$. $1 - x + x^2 \geq f(x)$.

Question 19 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$$

on peut démontrer que pour tout $-1 \leq x \leq 1$:

$1 + 2x \leq f(x)$. $1 + x + x^2 \geq f(x)$. $x + \frac{x}{2} \geq f(x)$. $1 + x + x^2 \leq f(x)$.

Question 20 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction :

$$f : x \mapsto \ln(1+x),$$

on peut démontrer que pour tout $0 \leq x \leq 1$:

$x - \frac{x^2}{2} \geq f(x)$. $x + \frac{x^2}{2} \leq f(x)$. $1 + x \leq f(x)$. $x - \frac{x^2}{2} \leq f(x)$.

Question 21 Soit $f(x) = -\frac{x+1}{2x+x^2}$ pour $x \in]-2, 0[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = 1$ $f^{(2n)}(-1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(-1) = (2n+1)!$
 $f(-1) = 0$ et $f^{(n)}(-1) = 1$ si $n \geq 1$ $f^n(1) = n!$ $f(-1) = 0$ et $f^{(n)}(-1) = n!$ si $n \geq 1$

Question 22 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 1$, $f''(0) = f''(1) = 2$, $f'''(0) = f'''(1) = 6$ et $|f^{(4)}(x)| \leq 24$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toutes les assertions suivantes sont nécessairement fausses, sauf une. Laquelle ?

$f(0, 1) = 0, 126$ $f(1, 1) = 0, 126$ $f(1, 1) = 0, 111$ $f(0, 1) = 0, 1112$
 $f(0, 1) = 0, 1109$



Question 23 Soit $f(x) = \frac{x-1}{2x-x^2}$ pour $x \in]0, 2[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

- $f(1) = 0$ et $f^{(n)}(1) = 1$ si $n \geq 1$ $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = 1$ $f^{(n)}(1) = n!$
 $f^{(2n)}(1) = 0$ et $f^{(2n+1)}(1) = (2n+1)!$ $f(1) = 0$ et $f^{(n)}(1) = n!$ si $n \geq 1$

Question 24 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Laquelle des formules suivantes donne la meilleure approximation de $f''(a)$?

- $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$ $\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Question 25 Soit $f(x) = 1 - 3x + 2x^2 + (x-1)^3 \cos(\sqrt{3+x^2} - 2(e^{x-1}))$ pour $x \in \mathbb{R}$. Laquelle des égalités suivantes est-elle juste ?

- $f'(1) = 1$ $f'(0) = 1$ $f(1) = 1$ $f'(1) = -3$ $f'(0) = 2$

Question 26 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Laquelle des formules suivantes donne la meilleure approximation de $f'(a)$?

- $\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$

Question 27 Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

- $f^{(n)}(0) = n!$ $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!$ $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = 1$
 $f(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = 1$ si $n \geq 1$ $f(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = n!$ si $n \geq 1$

Question 28 Soit $f(x) = -1 + x + 2(x-1)^2 + x^3 \cos(\sqrt{4+x^2} - 2e^{\cos x})$ pour $x \in \mathbb{R}$. Laquelle des égalités suivantes est-elle juste ?

- $f'(0) = 1$ $f'(1) = -3$ $f'(0) = 2$ $f(1) = 1$ $f'(0) = -3$

Question 29 Soit $f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = f'(1) = 1$, $f''(0) = f''(1) = 2$, $f'''(0) = f'''(1) = 6$ et $|f^{(4)}(x)| \leq 24$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toutes les assertions suivantes sont nécessairement fausses, sauf une. Laquelle ?

- $f(0, 1) = 0, 126$ $f(1, 1) = 0, 1112$ $f(0, 1) = 0, 111$ $f(1, 1) = 0, 1109$
 $f(1, 1) = 0, 126$

Question 30 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

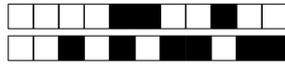
$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- $\text{Vect}(2e_1, -e_2, 2e_3)$ $\text{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$ $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ $\text{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$
 $\text{Vect}(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3)$



Question 31 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1 - e_2 + e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, -e_2, e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_2 + e_3) & \end{array}$$

Question 32 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(2e_1 - e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1, -e_2, 2e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) & \end{array}$$

Question 33 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 + e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 - e_2 - 2e_3) \\ \inputcheckbox Vect(2e_1, -e_2, -2e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \end{array}$$

Question 34 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

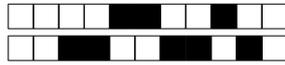
$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (2x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 - 2e_2 + e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, -2e_2, e_3) \\ \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2, e_2 + 2e_3, e_1 - e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + 2e_2 + e_3) & \end{array}$$



Question 35 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1 + e_2 + e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_1 - e_2 + e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 - e_2 + e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \end{array}$$

Question 36 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, -x_1 + x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1, e_2, -2e_3) & \inputcheckbox Vect(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, -e_1 + e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 - 2e_3) & \end{array}$$

Question 37 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{llll} \inputcheckbox Vect(e_1 - e_2 + e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 - e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1, -e_2, 2e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) \\ & \inputcheckbox Vect(e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3) & & \end{array}$$

Question 38 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

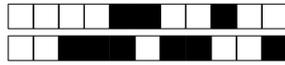
$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1 - e_2 + e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3) \\ \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1, e_2, 2e_3) & \end{array}$$



Question 39 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Le noyau de u est :

- $\text{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$ $\text{Vect}(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3)$ $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$
 $\text{Vect}(2e_1, -e_2, 2e_3)$ $\text{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$
-

Question 40 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- $\text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ $\text{Vect}(e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3)$
 $\text{Vect}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$ $\text{Vect}(e_1 + e_3, e_1 + e_2)$
-

Question 41 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (2x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ $\text{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3)$ $\text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3)$
 $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ $\text{Vect}(e_1 + e_2, e_2 - e_3)$
-

Question 42 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

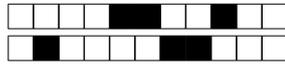
$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

- $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ $\text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ $\text{Vect}(2e_1, e_1 - e_2, 2e_3)$
 $\text{Vect}(-e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ $\text{Vect}(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3)$
-



Question 43 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_2 + e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_1 + e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2) & \end{array}$$

Question 44 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + x_3)$$

L'image de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1 - e_3, e_2 - e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 + e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_2 - e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) & \end{array}$$

Question 45 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 - 2x_2, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

$$\begin{array}{llll} \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_1 - e_2) & \inputcheckbox Vect(2e_1, e_2, 2e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) \\ & \inputcheckbox Vect(e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_3, e_1 - e_3) & & \end{array}$$

Question 46 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

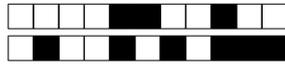
$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2, 2x_2 - x_3, -x_1 + x_3)$$

L'image de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(-e_1 + 2e_2, 2e_2 - e_3, -e_1 + e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_2 + e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_2 - e_3) & \end{array}$$



Question 47 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3) \\ \inputcheckbox Vect(e_1 + e_2, e_2 - e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_2 - e_3) & \end{array}$$

Question 48 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

L'image de u est :

$$\begin{array}{llll} \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 - e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_2 - e_3) & \inputcheckbox Vect(2e_1 + e_2 + 2e_3) \\ & \inputcheckbox Vect(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 + e_3) & & \end{array}$$

Question 49 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

L'image de u est :

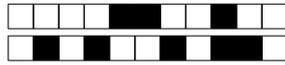
$$\begin{array}{lll} \inputcheckbox Vect(2e_1 - e_2 + 2e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, e_1 - e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_1 + e_2) \\ \inputcheckbox Vect(e_1, e_2, e_3) & \inputcheckbox Vect(e_1 + e_3, e_2 + e_3) & \end{array}$$

Question 50 Soient

$$e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (0, 1, 1).$$

- Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (22, -9, 3)$, $f(e_2) = (3, 0, 0)$, $f(e_3) = (11, -3, 1)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- Déterminer une base de $\text{im} f$.
- A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

$$\inputcheckbox 0 \quad \inputcheckbox 1 \quad \inputcheckbox 2 \quad \inputcheckbox 3 \quad \inputcheckbox 3.5 \quad \inputcheckbox 4 \quad \inputcheckbox 4.5 \quad \inputcheckbox 5 \quad \inputcheckbox 5.5 \quad \inputcheckbox 6 \quad \inputcheckbox 6.5 \quad \inputcheckbox 7 \quad \inputcheckbox 7.5 \quad \inputcheckbox 8$$

**Question 51** Soient

$$e_1 = (2, 1, 1), e_2 = (1, 2, 1), e_3 = (1, 1, 2) .$$

- a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (8, 5, 8)$, $f(e_2) = (10, 5, 10)$, $f(e_3) = (12, 5, 12)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- d) Déterminer une base de $\text{im} f$.
- e) A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3.5	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4.5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5.5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6.5	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7.5	<input type="checkbox"/>	8
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---

Question 52 Soient

$$e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (1, -2, -1) .$$

- a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (6, 3, 9)$, $f(e_2) = (5, 2, 7)$, $f(e_3) = (-6, -2, -8)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- d) Déterminer une base de $\text{im} f$.
- e) A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3.5	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4.5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5.5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6.5	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7.5	<input type="checkbox"/>	8
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---

Question 53 Soient

$$e_1 = (0, 1, 1), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 0) .$$

- a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (5, 5, 2)$, $f(e_2) = (4, 4, 1)$, $f(e_3) = (3, 3, 1)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- d) Déterminer une base de $\text{im} f$.
- e) A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

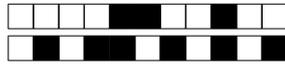
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3.5	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4.5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5.5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6.5	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7.5	<input type="checkbox"/>	8
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---

Question 54 Soient

$$e_1 = (5, 2, 0), e_2 = (8, 5, 2), e_3 = (3, 2, 1) .$$

- a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (7, 3, -3)$, $f(e_2) = (17, 3, -3)$, $f(e_3) = (7, 1, -1)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- d) Déterminer une base de $\text{im} f$.
- e) A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3.5	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4.5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5.5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6.5	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7.5	<input type="checkbox"/>	8
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---	--------------------------	-----	--------------------------	---



Question 55 Soient

$$e_1 = (5, 2, 0), e_2 = (8, 5, 2), e_3 = (3, 2, 1) .$$

- a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (3, 5, 5)$, $f(e_2) = (2, 10, 10)$, $f(e_3) = (0, 4, 4)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- d) Déterminer une base de $\text{im} f$.
- e) A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8

Question 56 Soient

$$e_1 = (1, -1, -1), e_2 = (-1, 1, -1), e_3 = (-1, -1, 1) .$$

- a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (4, 7, 10)$, $f(e_2) = (2, 5, 8)$, $f(e_3) = (0, 3, 6)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- d) Déterminer une base de $\text{im} f$.
- e) A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8

Question 57 Soient

$$e_1 = (2, 1, 1), e_2 = (1, 2, 1), e_3 = (1, 1, 2) .$$

- a) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire telle que $f(e_1) = (5, 1, -1)$, $f(e_2) = (5, -1, 1)$, $f(e_3) = (6, 0, 0)$. Déterminer $f(x, y, z)$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
- d) Déterminer une base de $\text{im} f$.
- e) A-t-on $\ker f \oplus \text{im} f = \mathbb{R}^3$?

0 1 2 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8