Fiche VII : Représentation matricielle des applications linéaires.

Exercice 1.-5

Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire qui a pour matrice :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

dans les bases canoniques.

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \epsilon \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+3t=0 \\ x+y+2z+t=0 \\ x-2y+5z-5t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+3t=0 \\ -y+z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3z+t \\ y=z-2t \end{cases}.$

Donc $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -3z+t \\ z-2t \\ z \\ t \end{pmatrix} : z, t \epsilon \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : z, t \epsilon \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **et** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ sont clairement indépendants, ils forment une base de $\ker(f)$.

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_2-2C_1 \\ C_3-C_1 \\ C_4-3C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_3+C_2 \\ C_4-2C_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Donc $\mathbf{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rang}(\boldsymbol{f}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})) = \mathbf{2}.$

Remarque. On a bien le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = 2 + 2 = \mathrm{rang}(f) + \dim(\ker(f))$.