

Examen partiel du 5 avril 2017

durée : 1h

documents interdits

« **Question de cours** » : quelle est la dimension du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leq n$? **2pts**

Exercice 1

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de \mathbb{R}^3 . Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$u(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, u(e_2) = e_2 + e_3, u(e_3) = e_1 .$$

a) Déterminer la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3) . **2pts**

b) Déterminer une base du noyau de u . **2pts**

c) Quel est le rang de la matrice A ? **2pts**

Exercice 2

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \frac{4n}{(n+1)^2} \leq 1 .$$

3pts

b) Déterminer la borne supérieure de $\left\{ \frac{4n}{(n+1)^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. **2pts**

c) Déterminer la borne inférieure de $\left\{ \frac{4n}{(n+1)^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. **3pts**

Exercice 3

a) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction $\frac{X^3}{X^2+4}$. **3pts**

b) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} la fraction $\frac{X^3}{X^2+4}$. **3pts**