

**Examen partiel du 5 avril 2017**

durée : 1h

*documents interdits*

« **Question de cours** » : quelle est la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes réels de degré  $\leq n$  ? **2pts**

**Exercice 1**

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire telle que :

$$u(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad u(e_2) = e_2 + e_3, \quad u(e_3) = e_1 .$$

a) Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . **2pts**

b) Déterminer une base du noyau de  $u$ . **2pts**

c) Quel est le rang de la matrice  $A$  ? **2pts**

**Exercice 2**

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 < \frac{4n}{(n+1)^2} \leq 1 .$$

**3pts**

b) Déterminer la borne supérieure de  $\left\{ \frac{4n}{(n+1)^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . **2pts**

c) Déterminer la borne inférieure de  $\left\{ \frac{4n}{(n+1)^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . **3pts**

**Exercice 3**

a) Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  la fraction  $\frac{X^3}{X^2+4}$ . **3pts**

b) Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  la fraction  $\frac{X^3}{X^2+4}$ . **3pts**