

Partiel : durée 1h30
14 mars 2018

Tous les documents sont interdits, l'usage des calculatrices et des téléphones portables sont interdits.

Exercice 1.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où

$$u_1 = (1, -1, 1, 1) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, 1, -1, 1)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Donner une base de E et une base de F .
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Exercice 2.

Soient P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 cinq polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ définis par $P_0(X) = 1, P_1(X) = X - 1, P_2(X) = (X - 1)^2, P_3(X) = (X - 1)^3$ et $P_4(X) = (X - 1)^4$.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X], P(1) = 0, P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) = 0\}$. on admettra que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_4[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Montrer que (P_3, P_4) est une base de E .
3. On pose $F = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$, en donner une base.
4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}_4[X]$?

Exercice 3.

1. Sans faire de calcul, calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = (\sin(x) + x)^{15} x^3 + 1 + 2x^3$$

2. Calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction g définie par :

$$g(x) = e^x \cos(2x)$$

3.
 - a. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de $x \ln(1 + x)$ en 0.
 - b. En déduire le développement limité à l'ordre 2, de h au voisinage de 0, où h est définie par :

$$h(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x \ln(1 + x)}$$

Exercice 4.

Calculer, sans préjuger qu'elle existe la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$$

Exercice 5.

On pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = I + J$

1. Calculer A^n en fonction de n , pour cela, on pourra montrer que $A = I + J$, que pour tout $k > 0$, $J^k = 2^{k-1}J$ et appliquer la formule du binôme de Newton.
2. En déduire u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 6.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système $AX = O$.