Université Claude Bernard Lyon 1 — Semestre de printemps 2018
Fondamentaux des mathématiques 2

Partiel : durée 1h30
14 mars 2018

Tous les documents sont interdits, l'usage des calculatrices et des téléphones portables sont interdits.

Exercice 1.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$
Soit $E=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$ et $F=Vect(u_1,u_2)$ où

$$u_1=(1,-1,1,1) \quad \text{et} \quad u_2=(1,1,-1,1)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et une base de F.
3. A-t-on $E\oplus F=\mathbb{R}^4$?

Correction exercice1
1. Première solution
   Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$

$$x\in E \Leftrightarrow \begin{cases} x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ x_1=-x_2-x_3-x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)\\ x_1=-x_2-x_3-x_4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_2(-1,1,0,0)+x_3(-1,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)\\ x_1=-x_2-x_3-x_4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_2(-e_1+e_2)+x_3(-e_1+e_3)+x_4(-e_1+e_4)\\ x_1=-x_2-x_3-x_4\end{cases}$$

   Ce qui montre que $E=Vect(-e_1+e_2,-e_1+e_3,-e_1+e_4)$ et par conséquent E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   Deuxième solution

$$0+0+0+0=0\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^4}\in E$$

   Soient $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$, $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ et $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in E$, $y_1+y_2+y_3+y_4=0$. Soient λ et μ deux réels

$$\lambda x+\mu y=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,\lambda x_3+\mu y_3,\lambda x_4+\mu y_4)$$
$$(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_2+\mu y_2)+(\lambda x_3+\mu y_3)+(\lambda x_4+\mu y_4)$$
$$=\lambda(x_1+x_2+x_3+x_4)+\mu(y_1+y_2+y_3+y_4)=0$$

   Donc $\lambda x+\mu y\in E$, ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. $(-e_1+e_2,-e_1+e_3,-e_1+e_4)$ est une famille génératrice de E, pour tout α,β,γ réels

$$\alpha(-e_1+e_2)+\beta(-e_1+e_3)+\gamma(-e_1+e_4)=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow(-\alpha-\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha-\beta-\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

   Donc cette famille est libre, il s'agit donc d'une base de E.
3. $\dim(E)=3$ et $\dim(F)=2$ donc $\dim(E)+\dim(F)=5\neq 4$ donc on n'a pas $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.
Soient P_0,P_1,P_2,P_3 et P_4 cinq polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ définies par $P_0(X)=1$, $P_1(X)=X-1$, $P_2(X)=(X-1)^2$, $P_3(X)=(X-1)^3$ et $P_4(X)=(X-1)^4$.
Soit $E=\{P\in\mathbb{R}_4[X], P(1)=0, P'(1)=0 \text{ et } P''(1)=0\}$. on admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $\mathcal{B}=(P_0,P_1,P_2,P_3,P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Montrer que (P_3,P_4) est une base de E.

3. On pose $F = Vect(P_0, P_1, P_2)$, en donner une base.
4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}_4[X]$?

Correction exercice2

1. Pour tous $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 réels
$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0 \Rightarrow \lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \lambda_3(X-1)^3 + \lambda_4(X-1)^4 = 0$$
On prend $X = 1$ alors $\lambda_0 = 0$.
$$\lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \lambda_3(X-1)^3 + \lambda_4(X-1)^4 = 0$$
On simplifie par $X - 1$
$$\lambda_1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 + \lambda_4(X-1)^3 = 0$$
On prend $X = 1$ alors $\lambda_1 = 0$.
On simplifie par $X - 1$
$$\lambda_2 + \lambda_3(X-1) + \lambda_4(X-1)^2 = 0$$
On prend $X = 1$ alors $\lambda_2 = 0$.
On simplifie par $X - 1$
$$\lambda_3 + \lambda_4(X-1) = 0$$
On prend $X = 1$ alors $\lambda_3 = 0$ et par suite $\lambda_4 = 0$
$(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une famille libre à 5 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 5, c'est une base.
2. $P_3(1) = 0$, $P_3' = 3(X-1)^2$ donc $P_3'(1) = 0$ et $P_3'' = 6(X-1)$ donc $P_3''(1) = 0$ et $P_3 \in E$
$P_4(1) = 0$, $P_4' = 4(X-1)^3$ donc $P_4'(1) = 0$ et $P_4'' = 12(X-1)^2$ donc $P_4''(1) = 0$ et $P_4 \in E$
P_3 et P_4 sont deux vecteurs non proportionnels de E. C'est une famille libre de E.
D'autre part
$$P \in E \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, P = (X-1)^3(aX+b) = aX(X-1)^3 + b(X-1)^3$$
$(X(X-1)^3, (X-1)^3)$ est une famille génératrice de E, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de E donc $\dim(E) = 2$
(P_3, P_4) est une famille libre à deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base de E.
3. (P_0, P_1, P_2) est libre en tant que sous-famille d'une famille libre, elle engendre F, c'est une base de F.
4. (P_0, P_1, P_2) est une base de F et (P_3, P_4) est une base de E donc $E \oplus F = \mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 3.

Calculer un développement limité à l'ordre 3, en 0, des fonctions suivantes :

1. Sans faire de calculs, calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction f définie par :
$$f(x) = (\sin(x) + x)^{15} x^3 + 1 + 2x^3$$
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction g définie par :
$$g(x) = e^x \cos(2x)$$
3.
   a. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de $x\ln(1+x)$ en 0.
   b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de h au voisinage de 0.
$$h(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x\ln(1+x)}$$

Correction exercice3

1. $(\sin(x) + x)^{15} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $(\sin(x) + x)^{15} = o(1)$ alors
$$f(x) = o(1)x^3 + 1 + 2x^3 = 1 + 2x^3 + o(x^3)$$
2.
$$g(x) = e^x \cos(2x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(1 - 2x^2 + o(x^3))$$
$$= 1 + x + \left(\frac{1}{2} - 2\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - 2\right)x^3 + o(x^3) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{12}x^3 + o(x^3)$$
3.

a. $x\ln(1+x)=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$

b.

$$h(x)=\frac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}{x^2-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{3}+o(x^4)}=\frac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^2-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{3}+o(x^4)}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24}+o(x^2)}{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$\frac{1}{2}\qquad-\frac{x^2}{24}+o(x^2)$	$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$
$\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$	$\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{12}$
$\frac{x}{4}-\frac{5}{24}x^2+o(x^2)$	
$\frac{x}{4}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$	
$-\frac{x^2}{12}+o(x^2)$	
$-\frac{x^2}{12}+o(x^2)$	
$o(x^2)$	

Donc $h(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)$

Exercice 4.

Calculer, sans préjuger qu'elle existe la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Correction exercice4

$$(1+X)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{X}{2}-\frac{X^2}{8}+o(X^2)$$

On pose $X=-x^2$

$$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}=\frac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^2)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}=\frac{\dfrac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{6}+o(1)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{6}$$

Exercice 5.

On pose $u_0=1$ et $v_0=0$, puis pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n+v_n$ et $v_{n+1}=u_n+2v_n$.

Soient $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=I+J$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $J^n=2^{n-1}J$.
2. En déduire A^n en fonction de n, à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n.

Correction exercice5

1. Par récurrence, $J^1=2^{1-1}J$ est vrai.

   Il faut montrer que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$.

   $$J^{n+1}=J^nJ=2^{n-1}JJ=2^{n-1}J^2$$

   Et

   $$J^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=2J$$
   $$J^{n+1}=2^{n-1}2J=2^nJ$$

   Ce qui achève la récurrence.
2. $IJ=JI$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = \binom{n}{0} J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J$$

$$= I + \frac{1}{2} J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k = I + \frac{1}{2} J \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - 1 \right) = I + \frac{1}{2} J((2+1)^n - 1)$$

$$= I + \frac{1}{2} J(3^n - 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(3^n - 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Par une récurrence quasi immédiate on a :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{pmatrix}$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ v_n = \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{cases}$$

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Résoudre le système $AX = O$.

Correction exercice6

$$AX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2(x_3 - 2x_4) - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 + x_4 \\ x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, comme cette famille engendre l'espace vectoriel des vecteurs colonnes vérifiant $AX = O$, c'est une base de cet espace vectoriel.