

Examen partiel du 5 avril 2017*2ème sujet*

durée : 1h

documents interdits

« **Question de cours** » : quelle est la dimension du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'espace des matrices carrées de taille n ? **2pts**

Exercice 1

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de \mathbb{R}^3 . Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$u(e_1) = 2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 2e_1 - e_2 + 3e_3, \quad u(e_3) = -e_1 + e_2 - 2e_3 .$$

- a) Déterminer la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3) . **2pts**
b) Déterminer une base de l'image de u . **2pts**
c) Quelle est la dimension du noyau de u ? **2pts**

Exercice 2

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} .$$

- 3pts**
b) Déterminer la borne supérieure de $\left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. **2pts**
c) Déterminer la borne inférieure de $\left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. **3pts**

Exercice 3

- a) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction $\frac{1}{X(X^2+1)}$. **3pts**
b) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} la fraction $\frac{1}{X(X^2+1)}$. **3pts**