

mercredi 13 mars 2019
examen partiel

durée : 2h

*calculatrices et documents sont interdits et les téléphones portables doivent être éteints.***Exercice 1.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculer A^2 puis A^3 .
- Calculer $A^3 - 3A$.
- En déduire A^{-1} en fonction de A^2 , A et I .

Exercice 2.Soient $u_1 = (1, -2, 1, 0)$ et $u_2 = (2, -3, 0, 1)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^4 .

- Donner une ou plusieurs équations caractérisant un vecteur $u = (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u_1, u_2)$
- Soit $u_3 = (1, 1, 4, 0) \in \mathbb{R}^4$ montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
- La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de \mathbb{R}^4 ?

Exercice 3.Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(\frac{1}{x})$.

- Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
- Calculer, lorsque c'est possible, la dérivée de f .
- Sur quel ensemble la fonction est-elle dérivable ?
- Si elles existent calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Donner le tableau de variation de f , et tracer sommairement son graphe.

Exercice 4

- a) Déterminer le développement limité, en 0, à l'ordre 3, de la fonction

$$x \mapsto (\sin x)^3 .$$

- b) Déterminer le développement limité, en 0, à l'ordre 3 de la fonction

$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} .$$

- c) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) .$$

- d) En déduire

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \tan x}{(\sin x)^3} .$$

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x + y, 2x + 4y + 6z)$.

- a) Déterminer une base de $\ker f$.
- b) En déduire le rang de f et donner une base de $\text{Im } f$.
- c) A-t-on $\ker f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$?