Examen partiel *(sujet de rattrapage)* jeudi 15 mars 2018

durée : 2h

documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1 *Soit* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^4$.

Soient $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$ *et* $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ *où*

$$u_1 = (1, 2, 3, 4),\ u_2 = (1, 1, -1, -1)\ .$$

a) Montrer que E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

b) Donner une base de E *et une base de* F.

c) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$ *?*

Exercice 2 *On note* $\mathbb{R}_4[X]$ *l'espace des polynômes réels de degré* $\leqslant 4$. *Soient* P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 *cinq polynômes de* $\mathbb{R}_4[X]$ *définis par :*

$$P_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4),$$

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X(X-2)(X-3)(X-4), \\ P_2(X) &= X(X-1)(X-3)(X-4), \\ P_3(X) &= X(X-1)(X-2)(X-4), \\ P_4(X) &= X(X-1)(X-2)(X-3)\ . \end{aligned}$$

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ : \ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$. *On admettra que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et que* $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_4[X]$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Montrer que $\{P_3, P_4\}$ *est une base de* E.

c) On pose $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$. *En donner une base.*

d) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}_4[X]$ *?*

Exercice 3 *a) Donner le développement limité à l'odre* 3 *en* 0 *de :*

$$f(x) = (1 - \cos x)x^2 + 1 - 3x^3 \ .$$

b) Donner le développement limité à l'ordre 4 *en* 0 *de :*

$$g(x) = e^x \sin(4x) \ .$$

c) Donner le développement limité à l'ordre 4 *en* 0 *de* $x \tan x$.

d) En déduire le développement limité à l'ordre 2 *en* 0 *de :*

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x \tan x} \ .$$

Exercice 4 *Calculer* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{1+x} - \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}$.

Exercice 5 *On pose* $u_0 = 1$ *et* $v_0 = 0$ *puis pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_{n+1} = \ -2v_n \ \textit{et} \ v_{n+1} = u_n + 3v_n \ .$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P *est inversible et calculer* P^{-1}.

b) Montrer que $A = PDP^{-1}$.

c) En déduire u_n *et* v_n *en fonction de* n *indication : on pourra calculer* A^n *...*

Exercice 6 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système $AX = O$.