Chapitre X. Primitives

1) Définition

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que F est une primitive de f si F est dérivable sur I et :

$\forall x \epsilon I,\ F'(x) = f(x)$.

2) Notation

Si f est continue sur I, on note $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f sur I.

Exemple. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ où $C =$ constante.

3) Primitives à connaître par coeur.

$f = F'$	$F = \text{une primitive de } f$
x^n où $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x (sur $\mathbb{R}_{>0}$ où $a > 0$)	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$-\ln(\cos(x))$
$\mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0, \pi[$	$\ln(\sin(x))$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$ sur $]0, \pi[$	$-\mathrm{cotan}(x)$
$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a, a[$ où $a > 0$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{x^2+a^2}$ où $a > 0$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

Remarques.

$a^x = \exp(x \ln(a))$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{u'}{u} = -(\ln(u))'$

en effet : $\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

en effet : $\left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{x^2+a^2}$

4) Calcul des primitives des fractions rationnelles

Rappel. Une fraction rationnelle est une fonction de la forme $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$où p, q sont des fonctions polynomiales.

Toute fraction rationnelle se décompose en $f(x) = E(x) + \sum_i f_i$ où $E =$ polynôme et les f_i sont des « éléments simples ».

a) primitives des éléments simples de 1ère espèce

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, \text{si } n = 1 \\ \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C \end{cases}}$$

Exemple. Sur l'intervalle $]-3,3[$, $\int \frac{dx}{9-x^2} = ?$

On commence par décomposer en éléments simples : $\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x}\right)$. Puis on intègre les éléments simples :

$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\left(\int \frac{dx}{3-x} + \int \frac{dx}{3+x}\right) = \frac{1}{6}(-\ln(3-x) + \ln(3+x)) + C = \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)\right) + C.$$

Plus généralement, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$ où $a > 0$.

b) primitives des éléments simples de 2ème espèce

$\int \frac{(ax+b)dx}{(x^2+cx+d)^n} = ?$

où n entier >0, $a, b, c, d \epsilon \mathbb{R}, c^2 < 4d$.

On écrit : $\frac{(ax+b)}{(x^2+cx+d)^n}=\frac{2\alpha(x-p)+\beta}{((x-p)^2+q^2)^n}=\alpha\frac{2(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^n}+\beta\frac{1}{((x-p)^2+q^2)^n}$

où $\alpha,\beta\epsilon\mathbb{R}$ et :

$$x^2+cx+d=\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\underbrace{d-\left(\frac{c}{2}\right)^2}_{>0}=(x-p)^2+q^2 \text{ où } p=-\frac{c}{2}\ q=\sqrt{d-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Or, $\frac{2(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^n}=\begin{cases}\text{si } n=1\text{: } \ln((x-p)^2+q^2)' \\ \text{si } n\neq 1\text{: } \left(\frac{1}{1-n}\times\frac{1}{((x-p)^2+q^2)^{n-1}}\right)'\end{cases}$

$$\int\frac{dx}{((x-p)^2+q^2)}=\frac{1}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)+C$$

et pour calculer $\int\frac{dx}{((x-p)^2+q^2)^n}$, on intègre par parties $\int\frac{dx}{((x-p)^2+q^2)^{n-1}}\dots$

On pose $I_n=\underbrace{\int\frac{dx}{((x-p)^2+q^2)^n}}_{u'=1,\,v=\frac{1}{((x-p)^2+q^2)^n}\Rightarrow u=x-p,\,v'=\frac{-2n(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^{n+1}}}=\frac{x-p}{((x-p)^2+q^2)^n}+2n\int\frac{(x-p)^2dx}{((x-p)^2+q^2)^{n+1}}$

$$=\frac{x-p}{((x-p)^2+q^2)^n}+2n\left(\int\frac{(x-p)^2+q^2dx}{((x-p)^2+q^2)^{n\cancel{+1}}}-\int\frac{q^2dx}{((x-p)^2+q^2)^{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{x-p}{((x-p)^2+q^2)^n}+2nI_n-2nq^2I_{n+1}\Rightarrow\boxed{I_{n+1}=\frac{1}{2nq^2}\left((2n-1)I_n+\frac{x-p}{((x-p)^2+q^2)^n}\right)}$$

$$I_1=\frac{1}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)+\mathrm{C}$$

c) Cas général.

On décompose en éléments simples !

Exemples de calculs de primitives de fractions rationnelles.

1°)

$$\int\frac{x^3}{x^2+3x+2}dx=?$$

1ère étape = décomposer en éléments simples :

$$\frac{x^3}{x^2+3x+2} = x-3+\frac{7x-6}{x^2+3x+2}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -3x^2-2x & x-3 \\ 7x+6 & \end{array}$$

$$= x-3-\frac{13}{x+1}+\frac{20}{x+2}$$

Car $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$donc $\frac{7x-6}{x^2+3x+2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$où $a=\frac{-13}{1}=-13$ et $b=\frac{-20}{-1}=20$

`2ème étape = intégrer les éléments simples.`

$$\int\frac{x^3}{x^2+3x+2}dx = \int(x-3)dx - 13\int\frac{dx}{x+1}+20\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{x^2}{2}-3x-13\ln(x+1)+20\ln(x+2)+C$$

2°) $\int\frac{dx}{x(1+x^2)^2} = \int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}-\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)} = \ln(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

En effet, $\frac{1}{x(1+x^2)^2}=\frac{a}{x}+\frac{cx+d}{(1+x^2)^2}+\frac{ex+f}{(1+x^2)}$

où $a=1$.

Comme $\frac{1}{x(1+x^2)^2}$ est impaire, $d=f=0$ car $\frac{a}{x}+\frac{cx+d}{(1+x^2)^2}+\frac{ex+f}{(1+x^2)}=-(\frac{a}{-x}+\frac{c(-x)+d}{(1+x^2)^2}+\frac{e(-x)+f}{(1+x^2)})$.

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-(1+x^2)^2}{x(1+x^2)^2}=\frac{-2x^2-x^4}{x(1+x^2)^2}=\frac{-2x-x^3}{(1+x^2)^2}=\frac{-x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^2}=\frac{-x}{(1+x^2)}-\frac{x}{(1+x^2)^2}$$

car $-2x-x^3=(1+x^2)(-x)-x$.

3°)

$$\int\frac{(1-x)dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{\frac{-1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{(x^2+x+1)^2}dx=\underbrace{-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx}_{\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}+C}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

On intègre par parties ...

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\int\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+2\int\frac{(x^2+x+1)-\frac{3}{4}}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$\substack{u'=1,\,v=\frac{1}{x^2+x+1}\\ u=x+\frac{1}{2},\,v'=\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x^2+x+1)^2}}$$

$$=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+2\int\frac{dx}{(x^2+x+1)}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$\Rightarrow\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{(x^2+x+1)}$ Or, $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)}=\int\frac{dx}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

Donc, $\boxed{\int\frac{(1-x)dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C}$.